

Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Buenos Aires
Primer Parcial de Probabilidad y Estadística - 16 de octubre

Nombre y Apellido: [Redacted]

P1	P2	P3	P4	T1	T2	Nota
B	B	M	B	B	B	8 (ocho)

Condiciones de aprobación:

Para promoción: 2 ejercicios prácticos, un teórico y otro cualquiera.

Para Práctica: 3 ejercicios prácticos

- El 75% de los alumnos que cursan en P y E firman los trabajos prácticos en noviembre. De los que firman los trabajos prácticos el 73% se va de vacaciones en enero, del resto el 36% se va de vacaciones en enero.
 - ¿cuál es la probabilidad de que un alumno se vaya de vacaciones en enero?
 - Si se fue de vacaciones en enero, ¿cuál es la probabilidad de que haya firmado los trabajos prácticos en noviembre?
- Los autos que pasan por una cabina de peaje siguen un proceso de Poisson con $\mu = 25$ autos por hora. El peaje cuesta 60 pesos, pero todos los automovilistas pagan con billetes de 100\$. Al empezar el día, Alfonso (que trabaja en la cabina) cuenta solamente con cuatro billetes de 10\$ y dos de 50\$.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que algún automovilista se quede sin vuelto en los primeros 40 minutos?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que pase más de media hora hasta que se quede sin vuelto?
- Sea Y una variable aleatoria continua con la siguiente función de densidad presenta la duración (en años) de ciertos componentes eléctricos:
$$f(x) = \begin{cases} b & \text{si } 0.4 < x < 0.8 \\ 0.3 \cdot e^{-0.3x} & \text{si } 0.8 \leq x < \infty \end{cases}$$
 - Halle b para que sea función de densidad y halle la función de distribución acumulada.
 - Halle el valor mediano e indique el significado
- Dos máquinas A y B contribuyen a la producción total de una fábrica en relación 4 a 6. La máquina A fabrica un 97 % de artículos buenos y la máquina B el 85%.
 - Si se toma una pieza al azar de la producción general de la fábrica y resulta ser defectuosa, calcular la probabilidad de que haya sido producida por la máquina A.
 - Si se toman 4 piezas al azar de un lote muy grande de la producción general, calcular la probabilidad de que por lo menos una de ellas sea buena.

Teórico 1

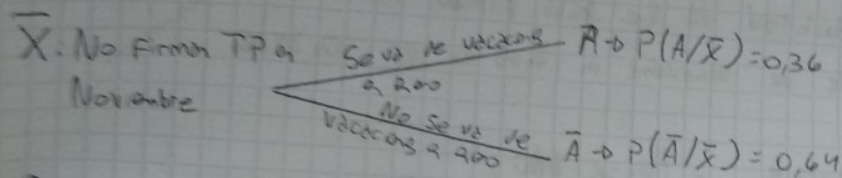
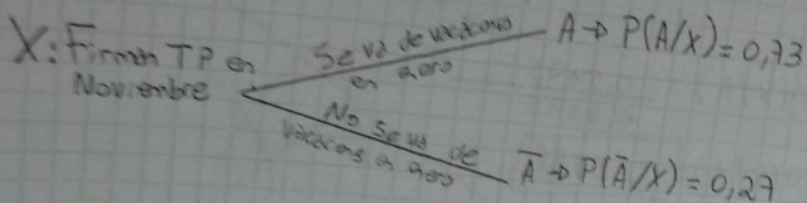
Dados A, B sucesos tales que $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$, indique si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas. Justifique adecuadamente:

- Si A y B mutuamente excluyentes entonces no son sucesos independientes.
- Si $\bar{A}, B$ representan una partición del espacio muestral entonces la A es un subconjunto de B

Teórico 2

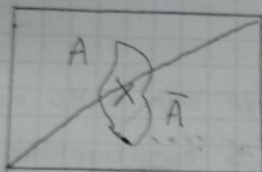
Si X es una variable aleatoria exponencial explique su relación con la variable Poisson y deduzca la fórmula de su esperanza.

1)



$$P(X) = 0,75, P(\bar{X}) = 0,25$$

b) $P(A)$?



$$A = (A \cap X) \cup (A \cap \bar{X})$$

Por Probabilidad Total.

$$P(A) = P(A \cap X) \cup P(A \cap \bar{X})$$

$$P(A) = P(X/X) \cdot P(X) + P(A/\bar{X}) \cdot P(\bar{X})$$

$$P(A) = 0,73 \cdot 0,75 + 0,36 \cdot 0,25$$

$$P(A) = 0,5475 + 0,09$$

$$P(A) = \boxed{0,6375}$$

La probabilidad de que un alumno se vaya de vacaciones en enero es 0,6375.

b) $P(X/A)$?

Por Bayes:

$$P(X/A) = \frac{P(A/X) \cdot P(X)}{P(A/X) \cdot P(X) + P(A/\bar{X}) \cdot P(\bar{X})}$$

$$P(X/A) = \frac{0,5475}{0,6375}$$

$$P(X/A) = \boxed{0,8588}$$

La probabilidad de que haya firmado los TPs en noviembre si se fue de vacaciones a esto es de 0,8588.

- 2)
- $\mu = 2,5$
 - Peaje = \$60
 - Vuelto p/c/m = \$40
 - Alfonso = \$140.

2) $2,5 \cdot 60 = \mu$

$\lambda \cdot 40 = 16,6$ (promedio de autos a 40 min)

Lo debe llegar más de 3 auto movilizas., si llegan más de 3 no se queda sin vuelta

$$Pois(\lambda t, x) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^x}{x!}$$

$$P(X \geq 4) = \sum_{x=4}^{\infty} \frac{e^{-16} \cdot (16)^x}{x!}$$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{x=0}^3 \frac{e^{-16} \cdot (16)^x}{x!}$$

$$P(X \geq 4) = \boxed{0,99991}$$

3) a)

$$\int_{0,4}^{0,8} b \cdot dx + \int_{0,8}^{\infty} 0,3 e^{-0,3x} dx = 1.$$

$$\left[bx \right]_{0,4}^{0,8} + 0,3 \left[\frac{-e^{-0,3x}}{0,3} \right]_{0,8}^{\infty} = 1$$

$$(0,8b - 0,4b) + \left(-\frac{1}{e^{0,3 \cdot \infty}} - -e^{-0,24} \right) = 1$$

$$0,4b + e^{-0,24} = 1$$

$$\boxed{b \approx 0,531}$$

$$(1) F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(x) = \int_{0,4}^x 0,53 \cdot dt$$

NOTA

$$F(x) = [0,53 \cdot t]_{0,4}^x$$

$$(1) F(x) = 0,53x - 0,212$$

$$(2) F(x) = \int_{0,8}^x 0,3 \cdot e^{-0,3t} dt$$

$$F(x) = \left[0,3 - \frac{e^{-0,3t}}{0,3} \right]_{0,8}^x$$

$$F(x) = -e^{-0,3x} - -e^{-0,24}$$

$$(2) F(x) = -e^{-0,3x} + e^{-0,24}$$

Finalmente:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0,4 \\ 0,53x - 0,212, & 0,4 \leq x < 0,8 \\ -e^{-0,3x} + e^{-0,24}, & 0,8 \leq x \end{cases}$$

b) El valor mediano o percentil 50 es aquel valor de x cuya probabilidad de ocurrir acumulada es igual a 0,5.

$$F(x_{0,5}) = 0,5$$

$$0,53 \cdot x_{0,5} - 0,212 = 0,5$$

$$0,53 \cdot x_{0,5} = 0,712$$

$$x_{0,5} = 1,34$$

4)

A: Se construye con A

El artículo es bueno

$$X \rightarrow P(X/A) = 0,97$$

El artículo es defectuoso

$$\bar{X} \rightarrow P(\bar{X}/A) = 0,03$$

B: Se construye con B

El artículo es bueno

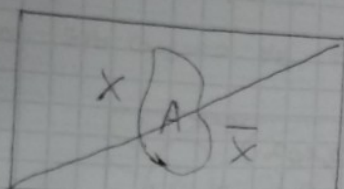
$$Y \rightarrow P(Y/B) = 0,93$$

El artículo es defectuoso

$$\bar{Y} \rightarrow P(\bar{Y}/B) = 0,07$$

$$P(A) = 0,4 \quad P(B) = 0,6$$

2)



~~$$P(A/X) = \frac{P(X/A) \cdot P(A)}{P(X/A) \cdot P(A) + P(X/B) \cdot P(B)}$$~~

~~$$P(X/B) \cdot P(B)$$~~

Por Bayes:

$$P(A/\bar{X}) = \frac{P(\bar{X}/A) \cdot P(A)}{P(\bar{X}/A) \cdot P(A) + P(\bar{X}/B) \cdot P(B)}$$

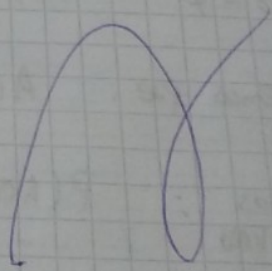
$$P(\bar{X}/B) \cdot P(B)$$

$$P(A/\bar{X}) = \frac{0,03 \cdot 0,4}{0,03 \cdot 0,4 + 0,07 \cdot 0,6}$$

$$P(A/\bar{X}) = \frac{0,012}{0,012 + 0,042}$$

$$P(A/\bar{X}) = \frac{0,012}{0,054}$$

$$P(A/\bar{X}) = \boxed{0,2222}$$



La probabilidad de que un artículo defectuoso haya sido producido por la máquina A es de 0,2222.

- b) Utilizamos B va Binomial X y definimos:
- $n = 4$ (piezas del lote)
 - $X \in [1, 4]$ (piezas buenas)
 - $p =$ probabilidad de que una sea buena.

$$p = P(X)$$

$$X = (X \cap A) \cup (X \cap B)$$

$$P(X) = P(A/X) \cdot P(A) + P(B/X) \cdot P(B)$$

$$P(X) = 0,97 \cdot 0,4 + 0,85 \cdot 0,6$$

$$P(X) = 0,388 + 0,51$$

$$P(X) = \boxed{0,898}$$

Usamos:

$$B_i(x; n; p) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (0,898)^k \cdot (0,102)^{n-k}$$

$$B_i(x; n; p) = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} \cdot (0,898)^k \cdot (0,102)^{4-k} - \binom{4}{0} (0,898)^0 (0,102)^4$$

$$B_i(x; n; p) = \boxed{0,99989}$$

Enonces, la probabilidad de que al menos una pieza de un lote de 4 sea buena es de 0,99989.

Teórico 1:

$$2) A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Sabemos que: $A \cap B = \emptyset$ (por hipotesis)

Aplicamos Probabilidad: $P(A \cap B) = \emptyset$

Si fueran independientes: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Entonces: $P(A) \cdot P(B) = \emptyset$

Pero por supuesto: $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$

Conclusión:

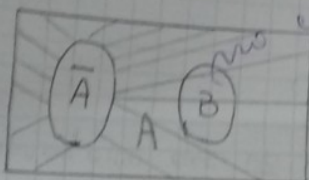
$$P(A) \cdot P(B) \neq \emptyset$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

La proposición es VERDADERA, si A y B son sucesos mutuamente excluyentes no son independientes.

b) Si $\bar{A}$ y B representan un par de eventos disjuntos o mutuamente excluyentes. $\bar{A} \cap B = \emptyset$. Pero A no tiene porque ser un subconjunto de B .

Ej:



es partición
Falso.

mal

Se observa que $\bar{A} \cap B = \emptyset$ pero B es un subconjunto de A , no al revés.

Ejercicio 2:

$$X = E(\lambda)$$

$$Y = \text{Pois}(\mu)$$

$$P_E(X > t) = P_{\text{Poi}}(Y=0)$$

$$e^{-\lambda t} = \frac{e^{-\mu} \mu^0}{0!}$$

$$e^{-\lambda t} = e^{-\mu}$$

$$e^{-\lambda t} = e^{-\lambda \cdot t}$$

Esto puede decir que la v.d. exponencial es útil para

determinar el tiempo que debe superarse u ocurrir hasta llegar al primer proceso de Poisson (antes de la primera ocurrencia).

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$E(x) = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$E(x) = \beta$$

$$\text{Donde } \beta = \frac{1}{\lambda}$$

2)

60 min $\rightarrow$ 25 autos

40 min $\rightarrow$ 16 autos (μ)

Al fono le podrá dar vuelta a un solo automovilista.
Entonces debemos buscar la probabilidad de que llegue uno o más autos en los primeros 40 minutos, sabiendo que el promedio es de 16.

- Xi Cantidad de automovilistas que llegan
- $\lambda \cdot t = 16$.

$$P(X \geq 1) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-16} \cdot (16)^x}{x!} = 1$$

No es π
Continuación

La probabilidad es del 100%.

b) Es la probabilidad de que no llegue ningún automovilista en más de 30 minutos, ya que si llega al menos uno, Alfonso se puede sin vuelta.

Se puede resolver con una V.d. Exponencial.

El promedio de autos que llegan a 30 minutos es 12,
y la probabilidad de que no llegue ningún auto es:
 $0,00001$.

N

M