

Apuntes de Cátedra

Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas

Profesor: Dr. Ing. Mario Eduardo DeBortoli

31/03/2017

Alumno: César Agosti

Objetivos:

Concebir a la matemática como una práctica social de argumentación, defensa, formulación y demostración.

Valorar la real aplicación de los conocimientos recibidos, independientemente de los que requieran para la formación y agilidad mental del Ingeniero.

Ser capaces de utilizar los conocimientos matemáticos para resolver problemas básicos de la Ingeniería.

Profundizar el conocimiento de las bases matemáticas necesarias para el planteo y resolución de los problemas clásicos de la Ingeniería.

Viscosidad Absoluta, Dinámica o Molecular

El programa de la materia comienza con propiedades de los fluidos, en donde básicamente se define densidad, peso específico, temperatura, presión, entre otras, se deja al alumno ver la bibliografía correspondiente, a fin de fortalecer el material introductorio.

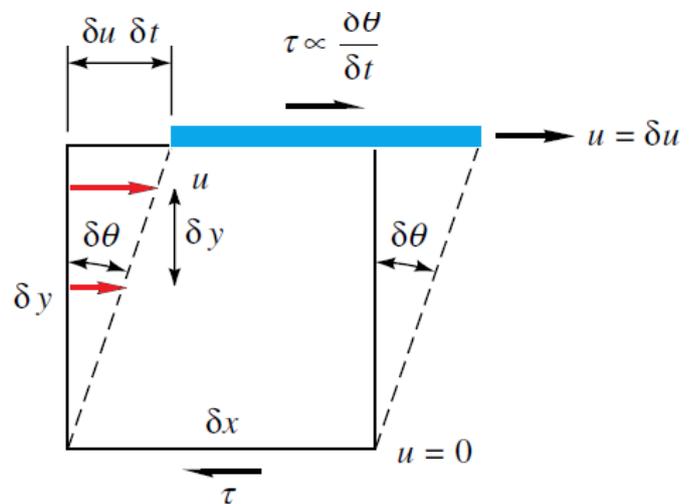
Comenzaremos el curso estableciendo diferencias entre un sólido y un fluido que básicamente son como éstos responden a las tensiones tangenciales. Un sólido puede resistir un esfuerzo cortante con una pequeña deformación estática, un fluido no, éste se deforma indefinidamente. El primer tema que veremos será la viscosidad de un fluido junto con las tensiones tangenciales.

Consideremos dos placas A y B de longitud infinita e infinitamente próximas entre sí, siendo el plano de trabajo el xy ; en su interior se encuentra contenido un fluido en reposo. De esta sección hipotética, tomaremos los puntos M y N . Si aplicamos un diferencial de fuerza dF_x a la placa superior A , el fluido adquirirá movimiento, las capas o estratos del fluido próximas a la cara adquirirán un diferencial de velocidad du , disminuyendo la misma a medida que nos alejamos de la placa en movimiento.

Por Hipótesis de Newton – Mayer, dadas dos capas de un fluido infinitas e inmediatamente próximas entre sí, que se mueven con velocidades diferentes, debido a la diferencia de cantidad de movimiento que presentan, se generan fricciones, dichas fricciones dan origen a tensiones tangenciales τ_{yx} , proporcionales a las variaciones de velocidades en el sentido perpendicular al escurrimiento.

El valor de la tensión tangencial en un sólido podemos obtenerlo del cociente entre la fuerza aplicada y el área en la cual actúa cuando esta tiende a cero, recordemos también que el área matemáticamente se representa como un vector normal a la superficie, como la superficie considerada está en el plano $x-z$ el vector es perpendicular a la misma, por eso indicamos al vector como A_y , utilizamos tensiones tangenciales porque son las que lo diferencian a un sólido de un fluido:

$$\tau_{yx} = \lim_{A_y \rightarrow 0} \frac{dF_x}{A_y}$$



Como estamos trabajando en el plano $x-z$ y solo queremos analizar las fuerzas tangenciales que son las que diferencian al sólido de un fluido, exigimos que la fuerza esté contenida únicamente en el eje x . Cualquier otra componente por más pequeña inclinación que tenga, no hay fuerza tangencial únicamente, ésta será acompañada de una fuerza normal.

Admitimos que el espacio entre la placa superior y la inferior está lleno de fluido. Por lo tanto el comportamiento del fluido será responsabilidad de las tensiones tangenciales del sólido.

Imagínese que la parte superior es el techo y la inferior es el piso de un recinto, si el techo no se mueve el fluido está en reposo, si de alguna manera es posible tirar de la placa superior por medio de una cuerda, la placa superior se desplazará. Ahora bien, supongamos que el fluido está en reposo, colocamos una cuerda que une el extremo inferior

Apuntes de Cátedra: Mecánica de los Fluidos e Hidráulica

Carrera: Ingeniería Industrial

con el superior $O-M$ y otra $O-P$ al comenzar a moverse la placa superior se desplaza y la inferior permanece quieta, es decir la cuerda pasa a ser $O-M'$ y $O-P'$. Debido a que cuidadosas mediciones de laboratorio demostraron que las partículas de un fluido en contacto con superficies solidas adquieren la velocidad de las superficies solidas. No hay una demostración se verificó en laboratorio. A modo de ejemplo imaginemos que reemplazamos la cuerda por individuos formando una escalera humana, aquel que se sujeta por ultimo al techo, al adquirir movimiento la placa superior se moverá y el que se encuentra en el piso permanecerá inmóvil.

La partícula que se desplaza de $M-M'$ recorre una distancia, por lo tanto se produce un giro angular. En un punto intermedio la velocidad del fluido seguirá un desplazamiento lineal similar al de la placa. En esta clase impondremos que esto es así, posteriormente lo demostraremos.

En un tiempo Δt pasamos de la cuerda considerada cambió de posición. Es decir hubo una velocidad de deformación.

$$tg \alpha = \frac{dl}{dy} \text{ Para ángulos relativamente pequeños } tg \alpha = d\alpha$$

$dl = d\alpha dy$ Ahora bien, sabiendo que $dl = du dt$ Igualando ambas expresiones

$$d\alpha dy = du dt \Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{d\alpha}{dt}$$

Lo anterior refiere a una proporcionalidad, para obtener una igualdad es necesario un factor de adecuación, conocido como viscosidad absoluta dinámica o molecular

$$\tau_{yx} = \lim_{A_y \rightarrow 0} \frac{dF_x}{A_y} = \mu \frac{du}{dy} = \mu \frac{d\alpha}{dt}$$

La viscosidad suele verse como un vínculo que transmite información entre las capas de un fluido. Para fluidos Newtonianos esta relación es lineal. Algunos fluidos no lo cumplen por ejemplo las pastas.

Recuerde que la mayoría de los fluidos que trabajaremos en ingeniería, el agua, petróleo, destilados son Newtonianos, los opuestos son frecuentes en la industria química.

Que sucederá si cambiáramos nuestro fluido, concebido en principio como agua por petróleo, si bien la variación de la velocidad en el sentido perpendicular al escurrimiento será diferente, la fuerza τ_{yx} permanecerá invariable.

Concluimos que uno es más viscoso que el otro.

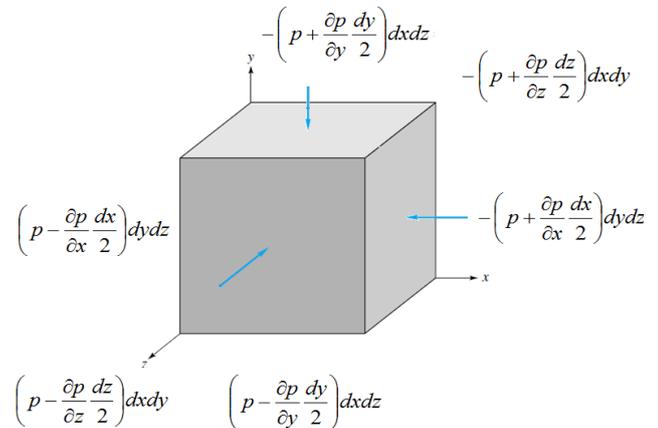
Para dos fluidos en las mismas condiciones de presión y temperatura fluye con mayor rapidez el menos viscoso.

Ecuación fundamental de la hidrostática

En mecánica de fluidos admitimos que únicamente las fuerzas que producen el movimiento de los fluidos son las superficiales y las másicas, en aquellas por ejemplo en las que hay desplazamiento de capas del fluido por convección no serán tenidas en cuenta debido a que la temperatura es constante.

$$F_{Superficiales} + F_{Másicas} = m\bar{a}$$

Consideremos un elemento de fluido en forma prismática y nuestro objetivo será obtener la presión en su centro para ello utilizaremos la herramienta matemática vista en Análisis Matemático, recordando que la, desconocida la función y sabiendo su valor en un punto podemos aproximarla a través de un polinomio de Taylor, esto se generaliza como Series Numéricas para funciones de dos y tres variable, pero en principio, para una función escalar el polinomio se calcula:



$$f_{(x_0)} = f_{(x_0)} + f'_{(x_0)}(x - x_0) + f''_{(x_0)} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + f^n_{(x_0)} \frac{(x - x_0)^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{f^k_{(x_0)}}{k!} (x - x_0)^k$$

Para el eje $x - x$:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz = \rho dx dy dz a_x$$

$$-2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} dydz = \rho dx dy dz a_x$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = \rho dx dy dz a_x$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho a_x$$

Para el eje $y - y$:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz + \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz = \rho dx dy dz a_y$$

$$-2 \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} dx dz = \rho dx dy dz a_y$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz = \rho dx dy dz a_y$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho a_y$$

Para el eje $z - z$:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy + \left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy + \rho g dx dy dz = \rho dx dy dz a_z$$

$$-2 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2} dx dy + \rho g dx dy dz = \rho dx dy dz a_z$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz + \rho g dx dy dz = \rho dx dy dz a_z$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = \rho a_z$$

Sumando los tres términos:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\right) + \rho g = \rho a_x + \rho a_y + \rho a_z$$

$$-\bar{\nabla}_p + \rho g = \rho \bar{a}$$

La última expresión se conoce como ecuación fundamental de la hidrostática, y al ser de carácter vectorial admite un análisis tridimensional, por lo cual la próxima clase veremos Fluidos en reposo, fluidos con movimiento rectilíneo, y movimiento curvilíneo uniforme.

Presión en un Punto

Cuando deducimos la ecuación fundamental de la hidrostática para el caso particular de un fluido en reposo, partimos de un cubo elemental de fluido es decir un prisma. Finalmente llegamos a la conclusión de que la presión en el eje z era:

$$P_{(z)} = \gamma \times h$$

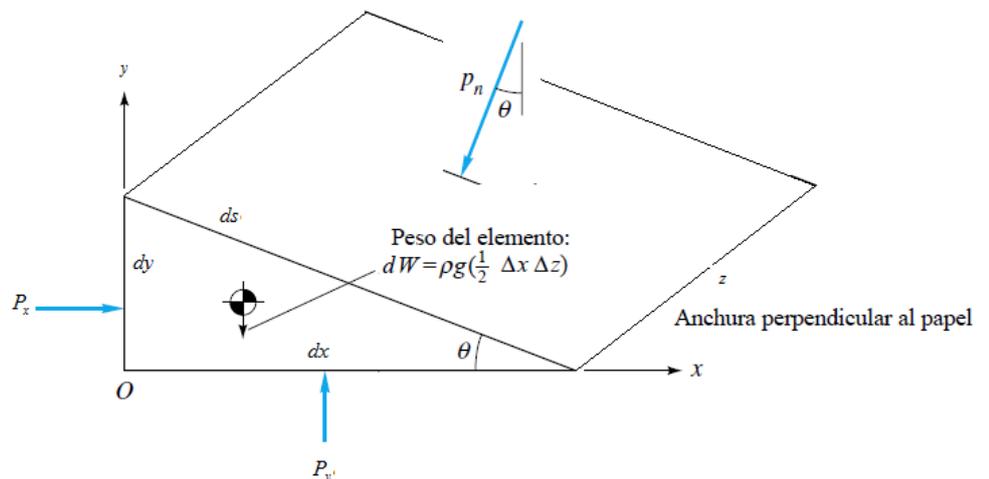
Además de que:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Es decir que las presiones en el punto existen para ambos ejes pero no hay variaciones en el eje x e y. Pero no encontramos en nuestro proceso deductivo cuánto vale P_x o P_y .

A nuestro cubo elemental de fluido lo cortaremos con un ángulo de inclinación α sin ninguna limitación a fin de obtener las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\text{sen} \alpha = \frac{dy}{ds} \quad \text{cos} \alpha = \frac{dx}{ds}$$



El diferencial volumen se toma en forma de cuña, es decir un tetraedro, porque los elementos diferenciales de volumen se toman de acuerdo a lo que se esté buscando.

Al ser un fluido en reposo las fuerzas superficiales son normales, por definición.

Estamos considerando un fluido real, no uno ideal el fluido tiene viscosidad solo que esta en reposo.

Aplicaremos la segunda ley de Newton para fluidos en reposo:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow P_x dy - P ds \text{sen} \alpha = 0$$

$$P_x dy - P ds \frac{dy}{ds} = 0 \rightarrow P_x = P$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow P_y dx - P ds \text{cos} \alpha - \gamma \frac{dx dy}{2} = 0$$

$$P_y dx - P ds \frac{dx}{ds} - \gamma \frac{dx dy}{2} = 0 \rightarrow P_y = P + \gamma \frac{dy}{2} \text{ Cuando el } dy \text{ tiende a cero entonces: } P_y = P$$

Apuntes de Cátedra: Mecánica de los Fluidos e Hidráulica

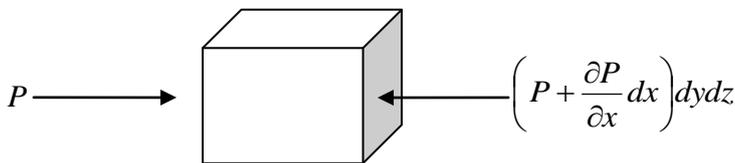
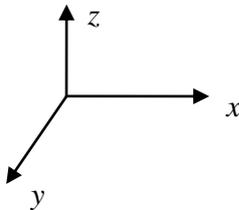
Carrera: Ingeniería Industrial

La presión P está definida sobre un ángulo α que no tiene ninguna limitación. Por lo tanto es igual a una presión P normal en cualquier dirección y esta es igual a P_x . Concluimos que la presión sobre una partícula se distribuye en forma independiente, finalmente la presión en una partícula es la misma para cualquier dirección. La presión hidrostática se transmite en todas las direcciones.

Superficies Equipotenciales

Supongamos que tenemos una presión $P = P_{(x,z)}$ es decir un campo de presiones el diferencial de volumen total será

igual a $dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$ no depende del tiempo porque está en estado estacionario, está en reposo.



Volveremos a nuestro análisis de nuestro cubo elemental de fluido:

Si analizamos el cubo en el eje x-x:

$$F = F_{\text{sup}} + F_{\text{mas}} = m\vec{a}$$

$$Pdydz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dydz + \rho g dx dy dz = 0$$

Y arbitrariamente decidimos que tenemos una atmósfera con aceleración gravitatoria en el eje x'' . No estamos interesados en obtener la función

$P = P_{(x,z)}$, por esa razón el punto se coloca en una de las caras del cubo y no en el centro como si lo hicimos anteriormente. Es decir en este caso no se tendrá una variación incremental $\pm \frac{dx}{2}$

Si aplicamos distributiva:

Eje $x-x$:

$$Pdydz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dydz + \rho g dx dy dz = 0$$

$$Pdydz - Pdydz - \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz + \rho g dx dy dz = 0$$

$$P - P - \frac{\partial P}{\partial x} dx + \rho g dx = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho_x$$

Multiplicando ambos miembros por dx :

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx = \rho_x dx$$

$$P dx dz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx dz + \rho g dx dy dz = 0$$

$$P dx dz - P dx dz - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz + \rho g dx dy dz = 0$$

$$P - P - \frac{\partial P}{\partial y} dy + \rho g dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \rho_y$$

Multiplicando ambos miembros por dy :

$$\frac{\partial P}{\partial y} dy = \rho_y dy$$

Eje $z - z$:

$$P dx dy - \left(P + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) dx dy + \rho g dx dy dz = 0$$

$$P dx dy - P dx dy - \frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz + \rho g dx dy dz = 0$$

$$P - P - \frac{\partial P}{\partial z} dz + \rho g dz = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \rho_z$$

Multiplicando ambos miembros por dz :

$$\frac{\partial P}{\partial z} dz = \rho_z dz$$

Sumando los términos anteriores:

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz = \rho_x dx + \rho_y dy + \rho_z dz$$

Sabiendo que:

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz = dP$$

Apuntes de Cátedra: Mecánica de los Fluidos e Hidráulica

Carrera: Ingeniería Industrial

Los vectores x, y, z son los componentes de fuerza para cada uno de los ejes.

$\rho_x dx + \rho_y dy + \rho_z dz = \rho(xdx + ydy + zdz)$ Expresando al densidad en función de la posición.

$$\frac{dR}{\rho} = xdx + ydy + zdz$$

Si consideramos dos puntos $a - b$ cuya trayectoria está dada por dl y sobre una partícula dada actúa una fuerza F . El trabajo T queda definido por el producto escalar entre ambos:

$$dT = \overline{F}dl = xdx + ydy + zdz = 0$$

Cada componente por su dirección.

Asociado a un campo de presiones $P = P_{(x,z)}$ hay un campo de trabajo $T = T_{(x,y,z)}$

Por definición de superficies equipotenciales los puntos sobre la misma deben ser iguales. Por lo tanto el trabajo debe ser constante $T = T_{(x,y,z)} = 0$

Si imponemos:

$x = y = 0 \rightarrow z dz = 0 \rightarrow z \neq 0 \rightarrow dz = 0$ No hay variación de la componente en la superficie equipotencial.

Las superficies equipotenciales están a una altura z constante. Si tenemos un fluido en reposo la superficie libre de líquido debe ser horizontal. Es decir si las únicas fuerzas que existen son las fuerzas másicas no pueden ejercer trabajo sobre la superficie equipotencial. De otra manera no todas las partículas van a realizar igual trabajo, que rompe el concepto al que habíamos llegado, es decir si la superficie libre no fuera horizontal existirían partículas con una aceleración gravitatoria con la capacidad de realizar trabajo diferente. Finalmente la superficie equipotencial debe estar a 90 grados de la resultante de la fuerzas.

Lo que buscamos con este análisis es conocer cuál era la forma de la superficie equipotencial.

Cualquier punto ubicado sobre la superficie horizontal debe tener la misma capacidad de hacer trabajo.

Las superficies paralelas a una superficie equipotencial, son equipotenciales.

Las herramientas matemáticas se usan en función del problema que se tiene.

Empuje sobre una compuerta

Minuto 30:28

Cuánto vale el espesor de la pared para que resista el diagrama de presiones.

La compuerta es completamente rígida no se deforma, la presión actúa en su baricentro.

$$dE = \gamma h d\Omega$$

$$\int dE = \gamma h \int d\Omega$$

$$E = \gamma h \Omega$$

Apuntes de Cátedra: Mecánica de los Fluidos e Hidráulica
Carrera: Ingeniería Industrial

$$dE = PdA = PBdh$$

$$dE = \gamma h B dh$$

$$\int_0^E dE = \gamma B \int_0^h h dh$$

$$E = \gamma B \frac{h^2}{2}$$

$$E = \gamma h B \frac{h}{2}$$

1° Caso. Fluido en Reposo.

Consideremos un recipiente lleno de fluido completamente en reposo, dentro del mismo ubicamos una partícula a una altura z del fondo y una altura h de la parte superior siendo H la altura desde la base del recipiente a la superficie libre, es decir $H = h + z$.

La ecuación fundamental de la hidrostática vista la clase pasada queda:

$$-\bar{\nabla}_p + \rho g = \rho \bar{a}$$

$$-\bar{\nabla}_p + \rho g = 0$$

Vamos a analizar la ecuación para cada uno de los ejes:

Para el eje $x-x \rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = 0 \rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ No tenemos gradiente de presión respecto al eje x .

Para el eje $y-y \rightarrow -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = 0 \rightarrow -\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ No tenemos gradiente de presión respecto al eje y .

Para el eje $z-z \rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z = 0 \rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = 0$ En este caso existe gradiente de presión respecto al eje z .

Podemos expresar la última expresión en términos de diferenciales:

$$-\frac{dp}{dz} - \rho g_z = 0$$

$$dp = -\rho g_z dz$$

Integrando:

$$\int dp = -\rho g_z \int dz + c$$

$$c = p - \rho g_z z$$

$$\text{Si } z = H \rightarrow P = P_{atm}$$

$$c = P_{atm} - \rho g_z H$$

Reemplazando:

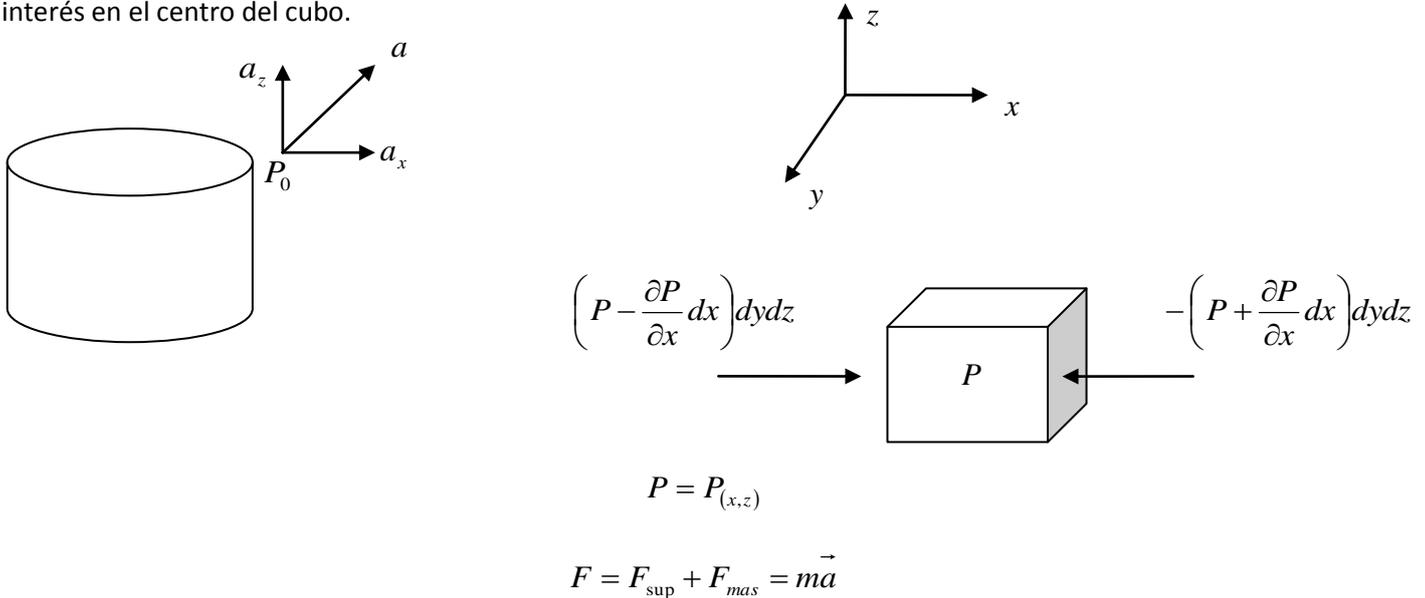
$$P = P_{atm} - \rho g_z (H - z)$$

$$P = P_{atm} - \rho g_z h$$

Donde h se denomina carga hidráulica.

2° Caso. Movimiento rectilíneo Uniforme.

Las partículas se mueven a la velocidad de la camioneta a_x ahora bien si tuviéramos una aceleración compuesta como por ejemplo la del avión esta tendría componente horizontal y vertical. Volvemos a nuestro cubo elemental de fluido y en este caso estamos interesados en conocer la función por esa razón ubicamos nuevamente el punto de interés en el centro del cubo.



Para el eje $x-x$:

$$\left(P - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz = \rho dx dy dz a_x$$

$$P dydz - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{2} dydz - P dydz - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{2} dydz = \rho dx dy dz a_x$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{2} dydz - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{2} dydz = \rho dx dy dz a_x$$

$$-2 \frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{2} dydz = \rho dx dy dz a_x$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \rho a_x$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\gamma}{g_x} a_x$$

Multiplicando ambos miembros por dx :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} dx = \frac{\gamma}{g_x} a_x dx$$

$$\left(P - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy - \left(P + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy - \rho g_z dx dy dz = \rho dx dy dz a_z$$

$$P dx dy - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} dx dy - P dx dy - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} dx dy - \rho g_z dx dy dz = \rho dx dy dz a_z$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} dx dy - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} dx dy - \rho g_z dx dy dz = \rho dx dy dz a_z$$

$$-2 \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dz}{2} dx dy - \rho g_z dx dy dz = \rho dx dy dz a_z$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z = \rho a_z$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = \rho a_z + \rho g_z$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\gamma}{g_z} a_z + \frac{\gamma}{g_z} g_z$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = \gamma \left(1 + \frac{a_z}{g_z}\right)$$

Multiplicando ambos miembros dz :

$$-\frac{\partial P}{\partial z} dz = \gamma \left(1 + \frac{a_z}{g_z}\right) dz$$

Si sumamos ambas expresiones:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} dx - \frac{\partial P}{\partial z} dz = \frac{\gamma}{g_x} a_x dx + \gamma \left(1 + \frac{a_z}{g_z}\right) dz$$

$$dP = \gamma \left(\frac{1}{g_x} a_x dx + \left(1 + \frac{a_z}{g_z}\right) dz\right)$$

$$P = \int_{P_0}^P dP = -\int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial x} dx - \int_{z_0}^z \frac{\partial P}{\partial z} dz = \gamma \left(\frac{1}{g_x} a_x \int_{x_0}^x dx + \left(1 + \frac{a_z}{g_z}\right) \int_{z_0}^z dz\right)$$

$$P - P_0 = \gamma \left(\frac{1}{g_x} a_x (x - x_0) + \left(1 + \frac{a_z}{g_z}\right) (z - z_0)\right)$$

Apuntes de Cátedra: Mecánica de los Fluidos e Hidráulica

Carrera: Ingeniería Industrial

Hacemos coincidir a nuestro eje de coordenadas con el punto de estudio P_0 coincidente con la superficie libre del líquido, es así que $P_0 = 0$ y además P también está sobre la superficie equipotencial. Por lo tanto $P_0 = 0 \therefore P = P_{atm} = 0 \rightarrow x_0 = z_0 = 0$

$$0 = \gamma \left(\frac{1}{g_x} a_x(x) + \left(1 + \frac{a_z}{g_z} \right) (z) \right)$$

Despejamos z para conocer la forma de la superficie acelerada:

$$z = \frac{-\frac{1}{g_x} a_x(x)}{1 + \frac{a_z}{g_z}} = \frac{-\frac{a_x}{g_x} x}{\frac{g_z + a_z}{g_z}} \rightarrow g_x = g_z \rightarrow z = \frac{a_x}{g_z + a_z} x$$

La forma de la superficie varía linealmente. Las superficies equipotenciales ahora son inclinadas.

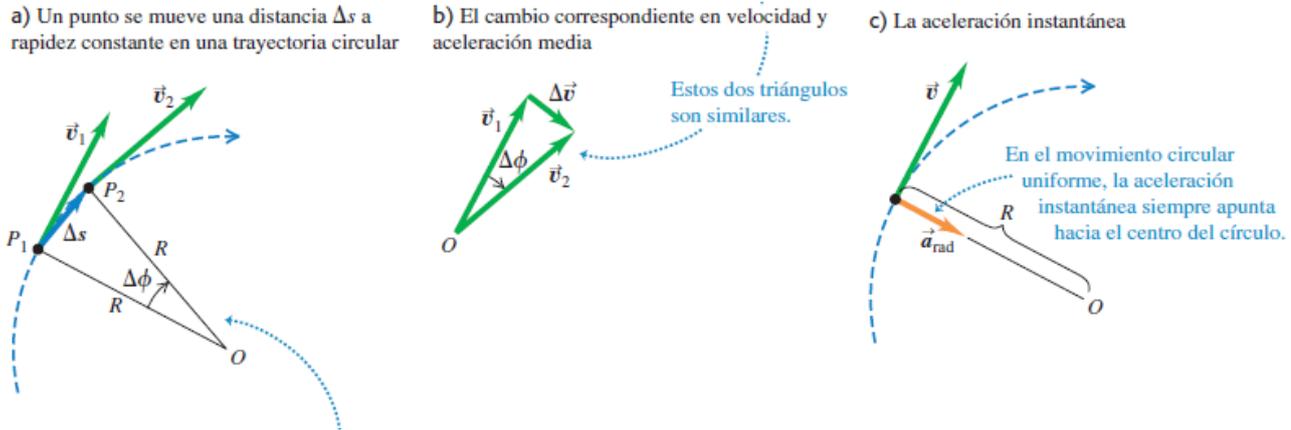
La pregunta que surge es, cual debería ser la altura del tanque de combustible para que al despegar el avión, el combustible no rebalse.

Si $a_x \gg a_z$ El combustible se deposita en la cara lateral del tanque.

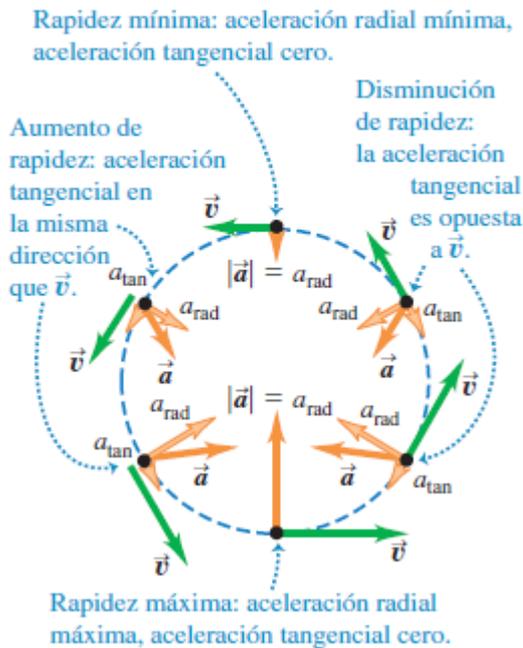
Si $a_z \gg a_x$ El combustible se deposita en el fondo del tanque.

3° Caso. Movimiento Circular Uniforme.

Repaso Movimiento Circular uniforme y no uniforme



Partícula que se mueve en un lazo vertical, como un carrito de montaña rusa, con rapidez variable.



En la figura a se muestra una partícula que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular de radio R con centro O . La partícula se mueve de P_1 a P_2 en un tiempo Δt . El cambio vectorial en la velocidad Δv se muestra en la figura b. Los ángulos rotulados $\Delta \phi$ son iguales porque es perpendicular a la línea OP_1 y es perpendicular a la línea OP_2 . Por lo tanto, los triángulos son semejantes. Los cocientes de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales, así que:

$$\frac{\Delta v}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \rightarrow \Delta v = v_1 \frac{\Delta s}{R}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = v_1 \frac{\Delta s}{R} \frac{1}{\Delta t}$$

$$a_n = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} v_1$$

$$a_n = \frac{v_1^2}{R}$$

En el movimiento circular no uniforme también hay una componente de aceleración paralela a la velocidad instantánea.

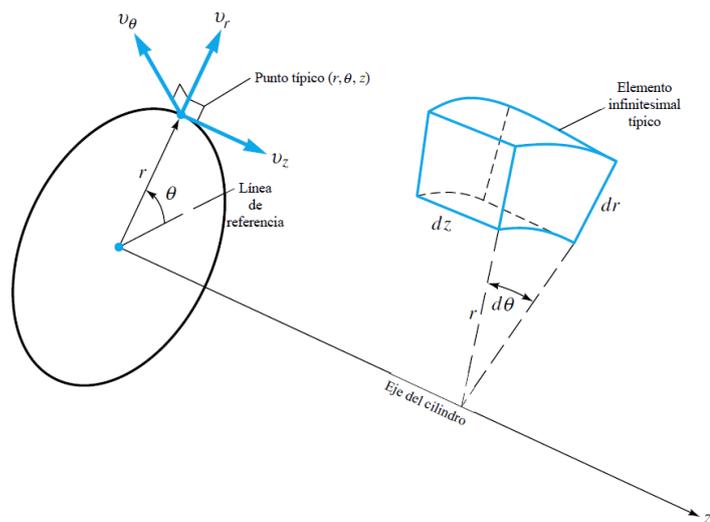
$$a_n = \frac{v_1^2}{R}$$

$$a_t = \frac{\Delta_v}{\Delta_t} \rightarrow v_t = \frac{ds}{dt} = \frac{rd\Phi}{dt} = \omega r$$

$$a_t = r \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_n = \frac{(\omega r)^2}{R} = \omega^2 r$$

Para describir la posición de la partícula se necesitan tres coordenadas $x : x(r, \theta, z)$



Para el eje $r - r$:

$$\left(P - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dr}{2} \right) d\theta \left(r - \frac{dr}{2} \right) dz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dr}{2} \right) d\theta \left(r + \frac{dr}{2} \right) dz + 2\rho g \frac{d\theta}{2} dr dz = -\rho r d\theta dr dz \omega^2 r$$

$$2\rho g \frac{d\theta}{2} dr dz \approx 0$$

$$\left(P - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dr}{2} \right) d\theta \left(r - \frac{dr}{2} \right) dz - \left(P + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dr}{2} \right) d\theta \left(r + \frac{dr}{2} \right) dz = -\rho r d\theta dr dz \omega^2 r$$

$$\left(Pd\theta - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dr}{2} d\theta \right) \times \left(rdz - \frac{dr}{2} dz \right) - \left(Pd\theta + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dr}{2} d\theta \right) \left(rdz + \frac{dr}{2} dz \right) = -\rho r d\theta dr dz \omega^2 r$$

$$\left(Pd\theta rdz - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dr}{2} d\theta rdz - Pd\theta \frac{dr}{2} dz + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dr}{2} d\theta \frac{dr}{2} dz \right) - \left(Pd\theta rdz + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dr}{2} d\theta rdz + Pd\theta \frac{dr}{2} dz + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dr}{2} d\theta \frac{dr}{2} dz \right) =$$

$$= -\rho r d\theta dr dz \omega^2 r$$

$$\left(-2 \frac{\partial P}{\partial z} \frac{dr}{2} d\theta rdz - 2Pd\theta \frac{dr}{2} dz \right) = -\rho r d\theta dr dz \omega^2 r$$

$$\left(-\frac{\partial P}{\partial z} dr d\theta r dz - P d\theta r dz \right) = -\rho r d\theta r dz \omega^2$$

$$\left(-\frac{\partial P}{\partial z} dr - P dr \right) = -\rho r dr \omega^2$$

Si existe una aceleración es debida a la existencia de fuerzas, por lo tanto hay un Δ_p .

Las presiones en eje $r-r$ tienen dos componentes a ambos lados del elemento de fluido las perpendiculares se cancelan pero las paralelas se suman, lo que no tenemos es aceleración tangencial por eso pueden sumarse las presiones. Es decir $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$. No hay movimiento relativo entre partículas. No tenemos aceleración en el sentido de θ .

Con respecto al eje $z-z$ no hay movimiento relativo por lo que es $p = \gamma h$, no hay aceleración en el sentido vertical
Igualmente al caso anterior ubicamos nuestro sistema de ejes en la superficie libre de líquido.

Nuevamente despejamos z para conocer la forma de la superficie.

Llegamos a la conclusión que la superficie libre del líquido es una parábola.

Si dibujamos la resultante de la aceleración esta sería perpendicular a la superficie equipotencial hacia afuera.

Que altura deberá tener un recipiente para que al rotar el líquido en su interior no rebalse.

Una de las particularidades que obtuvimos de este análisis es que una partícula por el solo hecho de estar rotando, gana energía, lo que constituye el principio básico del funcionamiento de una bomba. La partícula siempre ingresará por el centro de forma axial y abandonará el rodete por la periferia.

Fluidos en movimiento

Existen tres formas para analizar los fenómenos a partir de un fluido. Uno de ellos es el análisis integral en donde aparecen propiedades medias. Otra es la forma diferencial que es la que utilizamos para el análisis de los distintos casos de Newton y la deducción de la ecuación fundamental de la hidrostática, a partir de la cual obtenemos una función. Y por último veremos el análisis adimensional. En mecánica de fluidos intervienen muchas variables y lo que generalmente se hace es utilizar números adimensionales.

Las tres leyes básicas que vamos a analizar son las siguientes

Conservación de la masa: m

Conservación de la cantidad de movimiento: $\bar{P} = m\bar{v}$

Conservación del momento angular: $\bar{M} = \bar{R} \times m\bar{v}$

Definimos a la propiedad intensiva como la propiedad extensiva por unidad de masa:

$$\eta = \frac{N}{m}$$

Dividiendo las ecuaciones anteriores por la masa tendremos:

Conservación de la masa: $\frac{m}{m} = 1$

Conservación de la cantidad de movimiento: $\bar{p} = \frac{\bar{P}}{m} = \frac{m\bar{v}}{m} = \bar{v}$

Conservación del momento lineal: $\bar{m} = \frac{\bar{M}}{m} = \frac{\bar{R} \times m\bar{v}}{m} = \bar{R} \times \bar{v}$

Análisis Integral

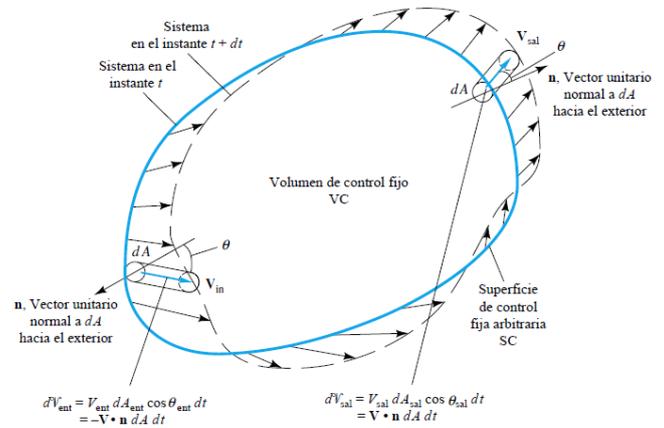
Consideremos un sistema termodinámico definido por:

En el sistema $t \rightarrow 1 + 2$ está definido por los volúmenes 1 y 2

Para $t + \Delta t \rightarrow 2 + 3$ estará definido por los volúmenes 2 y 3

Si el sistema es abierto las propiedades que estamos analizando pueden atravesar la frontera, si fuera cerrado no es posible.

Para nosotros los sistemas serán abiertos, intentaremos deducir que le ocurre a la masa una vez afectada por las propiedades que se están analizando. Por ejemplo una sección de tubería que le ocurre a nuestro sistema cuando el fluido interior se desplaza.



Esto se conoce como análisis Lagrangiano, utilizaremos este método para comenzar el estudio y posteriormente pasaremos a Euler.

Los análisis basados en LaGrange son utilizados en mecánica estructural, estática y resistencia de los materiales. Por ejemplo una viga simplemente apoyada sometida a la acción de una carga puntual o distribuida, originando un momento flector, la parte superior se comprime y la inferior se expande, además si tomamos una sección transversal “alma llena” por hipótesis simplificativa de Navier dentro del régimen elástico la sección se mantiene sobre el mismo plano, sino debería analizarse un caso de segundo orden. Si una parte de la viga se alarga y la otra se acorta hay un punto que no será sujeto de deformaciones conocido como eje neutro. Dicho punto se toma como referencia. Una vez aplicada la carga se mide el desplazamiento del punto, conocido como flecha, pudiendo obtener todas las deformaciones que sufre la sección transversal. “Todo se hizo conociendo un punto”.

En mecánica de sólidos las tensiones tangenciales se analizan por medio de deformaciones angulares. En fluidos analizamos las tensiones tangenciales por medio de la velocidad de deformación. En un fluido no es posible (no interesa) la deformación de la masa líquida, interesan otras cuestiones. Las fuerzas de cohesión en un sólido son elevadas por ello las partículas se mantienen en su ubicación y alcanza con analizar un único punto, en los fluidos estas fuerzas son muy débiles, por consiguiente las partículas se cruzan y deberían plantearse ecuaciones para cada punto de acuerdo a las respectivas trayectorias que siguen. Para cada una de estas ecuaciones deberían resolverse ecuaciones diferenciales en forma permanente y simultánea.

A partir de lo que el alumno conoce de cursos anteriores construiremos conocimiento nuevo. Una vez hecho el camino abandonaremos LaGrange y pasaremos a un volumen de control. Volumen de control fijo. Manteniendo la igualdad como si estuviéramos siguiendo la masa, vamos a plantear lo que sucede en una porción fija.

En un sistema, la variación de una propiedad cualquiera respecto al tiempo se expresa como sigue:

$$D = \frac{DN_{sistema}}{Dt}$$

Conocida como derivada material D porque sigue la materia. No debe confundirse con un diferencial total que se estudia en un espacio funcional, en nuestro caso estamos siguiendo la materia.

La letra $N_{sistema}$ puede ser masa m , cantidad de movimiento P o bien conservación de la cantidad de movimiento \overline{M} .

Recordando las definiciones vistas en análisis matemático:

$$D = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{sistema}(t + \Delta t) - N_{sistema}(t)}{\Delta t}$$

$$D = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[N_3(t + \Delta t) + N_2(t + \Delta t)] - N_2(t) + N_1(t)}{\Delta t}$$

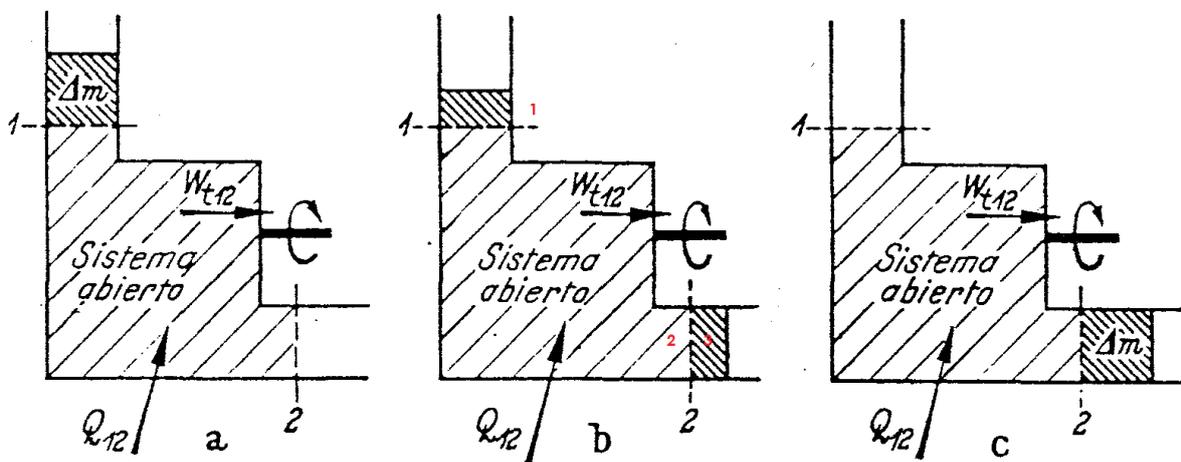
Sumando y restando $N_1(t + \Delta t)$ la ecuación no se altera:

$$D = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[N_3(t + \Delta t) + N_2(t + \Delta t)] - N_2(t) + N_1(t)}{\Delta t} + N_1(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)$$

$$D = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[N_2(t + \Delta t) + N_1(t + \Delta t)] - N_2(t) + N_1(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)]}{\Delta t}$$

Hasta el momento seguimos manteniendo una definición lagrangiana.

Consideremos el codo de una tubería dada por la imagen tomada de "Tratado simplificado de termodinámica" Baers Hans Pág. 91.



En la figura tomaremos a nuestro volumen de control coincidente con Δm , y vemos sus tres estados antes de penetrar, en un estado intermedio y finalmente al abandonar el sistema de control. Podemos decir que en un tiempo t la masa no ingresa al sistema para $t + \Delta t$ parte de masa permanece en el volumen y otra lo está abandonando. Además en un tiempo $t + \Delta t$ sale una porción de masa pero ingresa otra ya que estamos en un medio continuo. Vamos a considerar un volumen V_1, V_2 y V_3 .

Analizaremos las variaciones dentro del volumen de control fijo.

$N_2(t + \Delta t)$ Volumen de la masa que está ingresando en un tiempo $t + \Delta t$.

$N_1(t + \Delta t)$ Volumen de la masa que ingresó en un tiempo $t + \Delta t$.

$N_1(t) \wedge N_2(t)$ Volúmenes de las masas originales dentro del volumen de control.

Podemos realizar la siguiente simplificación:

$$D = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N_{VC}(t + \Delta t) - N_{VC}(t)}{\Delta t} \left\{ Euler + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)]}{\Delta t} \right\} Sistema$$

El primer término es lo que está sucediendo del lado fijo por lo cual dejamos de hablar del sistema y tomamos un volumen de control con lo que el análisis es a partir de Euler, la segunda parte sigue siendo el sistema.

La primera parte, por definición, puede expresarse en términos de diferenciales totales:

$$D = \frac{dN_{VC}}{dt} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[N_3(t + \Delta t) - N_1(t + \Delta t)]}{\Delta t} \left\} Sistema$$

Ya no es más una derivada material, porque estamos dentro de un espacio, no estamos siguiendo la materia lo restringimos a un espacio.

Ahora nos ocuparemos del segundo término que está fuera del volumen de control, intentaremos retrotraer la masa $N_3(t + \Delta t)$ al volumen de control.

El volumen que ingresa a la masa de control esta dado por la velocidad v y el tiempo Δt por el área n es el versor que define a la superficie 1 y además de un diferencial del área dA_1 siempre dirigido hacia afuera.

$$dV_1 = -\Delta t v n dA_1$$

Este producto escalar es negativo.

Ahora bien el volumen que salió del volumen de control es:

$$dV_3 = \Delta t v n dA_3$$

Estamos calculando volumen no a partir de seguir la masa, sino conociendo la superficie del volumen de control.

Intentaremos hacer la similitud en términos de propiedades para seguir con nuestro análisis anterior:

$$N_1(t + \Delta t) = - \int_{A_1} \eta \rho \Delta t v n dA_1$$

$$N_3(t + \Delta t) = \int_{A_3} \eta \rho \Delta t v n dA_3$$

Al sistema lo estamos expresando en función de una superficie asociado al volumen de control.

$$D = \frac{dN_{VC}}{dt} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left[\int_{A_3} \eta \rho \Delta t v n dA_3 + \int_{A_1} \eta \rho \Delta t v n dA_1 \right]}{\Delta t}$$

$$D = \frac{dN_{VC}}{dt} + \int_{A_3} \eta \rho v n dA_3 + \int_{A_1} \eta \rho v n dA_1$$

$$D = \frac{dN_{VC}}{dt} + \int_{A_3} \eta \rho v n dA_3 + \int_{A_1} \eta \rho v n dA_1$$

$$D = \frac{dN_{VC}}{dt} + \int_{SupC} \eta \rho v n (dA_3 - dA_1)$$

$$D = \frac{dN_{VC}}{dt} + \int_{SupC} \eta \rho v n dA$$

$$\frac{DN_{sistema}}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} dN_{VC} + \int_{SupC} \eta \rho v n dA$$

$$\frac{DN_{sistema}}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \int_{SupC} \eta \rho v n dA$$

Logramos expresar las propiedades de un sistema “LaGrange” a un equivalente en base a volumen de control y superficie de control “Euler”. Conocido como análisis integral

La primera integral representa la velocidad de cambio de la propiedad extensiva del volumen de control, este término será nulo en un flujo continuo, donde las propiedades del mismo no varían con el tiempo, proceso estacionario.

La segunda integral representa el flujo de la propiedad extensiva, a través de la superficie de control. Cuando el fluido no atraviesa la superficie de control este término es nulo.

Si tomamos un volumen de control de interés, por ejemplo un codo, porque el vector velocidad varia, debido a un cambio de dirección. Si existen variaciones de velocidad existe una aceleración y de ella se originan fuerzas, por lo cual es un punto estratégico a la hora de diseñar una tubería.

Las superficies de control deben elegirse adecuadamente, siempre por ellas deben pasar las propiedades que estamos analizando, por ejemplo en un codo jamás deberíamos elegir las paredes exteriores. La superficie de control puede tomarse de forma arbitraria pero debe buscarse la simplificación del problema no elevar su complejidad.

Según McDonald & Fox se tienen las siguientes interpretaciones físicas:

$\frac{DN_{sistema}}{Dt}$ Es la relación total del cambio de la propiedad extensiva arbitraria del sistema.

$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV$ Es la relación del cambio en el tiempo de la propiedad extensiva N dentro del volumen de control.

$\int_{SupC} \eta \rho v n dA$ Es la relación neta de flujo de la propiedad extensiva N hacia afuera de la superficie de control.

Si suponemos que la masa del volumen de control vale uno:

$$\frac{DN_{sistema}}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \int_{SupC} \rho v \cdot dA$$

Ahora bien si el proceso es estacionario:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV = 0$$

$$\frac{DN_{sistema}}{Dt} = \int_{SupC} \rho v \cdot dA = 0$$

Si analizamos la superficie de control de un fluido incompresible la densidad es constante.

$$\rho \int_{SupC} v \cdot dA = 0$$

$$\int_{SupC} v \cdot dA = 0$$

Finalmente concluimos que la masa que ingresa al volumen de control es igual a la que egresa por principio de conservación de la masa.

Si nuestro volumen de control es un codo las superficies de control a analizar son aquellas en las que únicamente atraviesa el fluido, además deben tomarse de forma tal que el problema se simplifique no que éste se vuelva más complejo, nunca tomaremos las paredes exteriores o formando un ángulo con el eje de referencia.

Si tomamos como propiedad extensiva a la cantidad de movimiento, multiplicamos por v ambos términos ya que $P = mv$:

$$\frac{DP}{Dt} = F_{sup} + F_{mas} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho v dV + \int_{SupC} \rho v v \cdot dA$$

La cantidad de movimiento es un vector porque tenemos masa por velocidad, una forma de ver que llegamos a un resultado, al menos matemáticamente correcto es analizando la consistencia de unidades vectoriales.

Llegamos a una suma de dos términos vinculados por un volumen de control. Pasamos de una deducción lagrangiana a una Euleriana donde existe una variación funcional espacial.

A modo de conclusión si quisiéramos medir la densidad humana de la universidad podríamos colocar sensores a cada uno de los individuos y ver como es su comportamiento en las diferentes áreas y determinar puntos de conglomeración "LaGrange", otra forma es tomar un recinto analizar cuantas personas ingresan al mismo tiempo por ejemplo el hall y extender lo ocurrido a toda la universidad Euler, lo normal es que ingresen por la puerta por ejemplo si ocurriera un incendio algunos se tiran por la ventana pero no es lo normal, lo que intentamos decir es que la descripción Euleriana nos permite tomar propiedad promedio y hacer proyecciones sobre el comportamiento general del sistema.

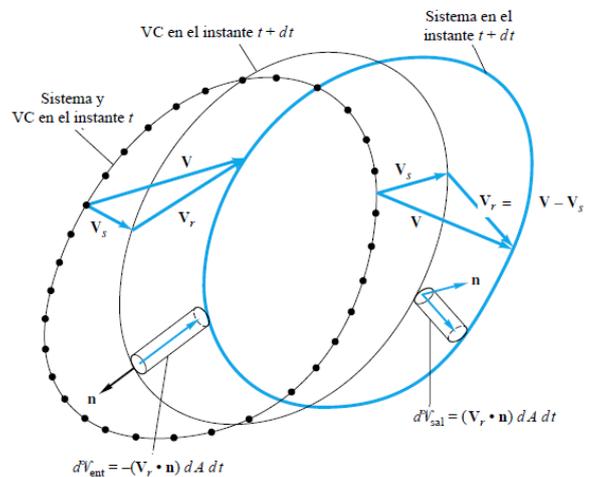
Análisis Diferencial

Vamos a plantear las ecuaciones de conservación de la masa en forma diferencial.

$$\frac{DP}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV + \int_{SupC} \rho v dA$$

Sea un volumen de control cubico de lados dx, dy, dz . La densidad en el volumen de control es ρ y la velocidad en dicho punto es $v = ui + vj + wk$ y un diferencial de área $dA = dydz i + dx dz j + dx dy k$.

Justificamos este análisis diferencial de forma arbitraria debido a que ocurre un fenómeno que no podríamos comprender de otra manera. Por ejemplo la lubricación. Vamos a integrar un análisis diferencial para encontrar las características de escurrimiento de un flujo laminar; es decir vamos conocer el comportamiento del perfil de velocidades.



Si del volumen de control sale masa con la misma velocidad que ingresa el proceso es estacionario, supongamos que esto no sucede y en un tiempo $t + \Delta t$ tendremos un volumen de control compuesto por liquido y aire es decir heterogéneo. Por lo que nuestro volumen de control deberá seguir a la superficie libre, en ese caso es interesante conocer el tiempo en que se vacía nuestro volumen de control. No siempre contamos en la industria con procesos estacionarios como por ejemplo las bombas centrifugas. Lo utilizamos únicamente a modo de simplificación.

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho dV = 0$$

El termino anterior es nulo por ser un proceso estacionario, si no lo fuera existen ángulos que varían respecto al tiempo, no los veremos en nuestro estudio ya que requieren una mayor complejidad en los cálculos.

Retomando nuestro análisis:

Dado un campo de velocidades y de densidad:

$$\rho = \rho(x, y, z)$$

$$v = v(x, y, z)$$

Dado un volumen de control prismático de acuerdo a un sistema de referencia ortogonal x, y, z las propiedades que se están analizando dentro del volumen de control varían y se superponen punto a punto, para una coordenada cualquiera tenemos un valor de velocidad y de densidad. Buscaremos la función espacial vectorial de comportamiento del fenómeno en este caso de conservación de la masa.

El punto que conocemos o de referencia es en el centro del diferencial volumen, de la nada no podemos generar algo, como hicimos para la deducción de la ecuación fundamental de la hidrostática.

Planteando las series de Taylor para cada una de los campos:

$$v_{izq} = \left(u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) i + \left(v - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) j + \left(w - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) k$$

$$v_{dc} = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) i + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) j + \left(w + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) k$$

$$\rho_{izq} = \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) i + \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) j + \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) k$$

$$\rho_{dc} = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) i + \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) j + \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) k$$

Haremos los productos de las propiedades:

$$v_{izq} \cdot \rho_{izq}$$

$$v_{dc} \cdot \rho_{dc}$$

$$v_{izq} \cdot \rho_{izq} = \left[\left(u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) i + \left(v - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) j + \left(w - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) k \right] \cdot \left[\left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) i + \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) j + \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) k \right]$$

Para una sola componente:

$$v_{izq} i \cdot \rho_{izq} i dydz = \left(u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) i \cdot \left(\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) i dydz$$

$$v_{izq} i \cdot \rho_{izq} i dydz = u \rho dydz - u \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} dydz - \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} dydz + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} dydz$$

Para una sola componente:

$$-v_{dc} i \rho_{dc} i dydz = - \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) i \cdot \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) i dydz$$

$$-v_{dc} i \cdot \rho_{dc} i dydz = -u \rho dydz - u \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} dydz - \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} dydz - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} dydz$$

Sumando ambos casos:

$$\int_{SupC} \rho u dA x = -2u \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} dydz - 2\rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{2} dydz$$

$$\int_{SupC} \rho u dA x = u \frac{\partial \rho}{\partial x} dx dydz + \rho \frac{\partial u}{\partial x} dx dydz$$

Un análisis para todas las componentes obtenemos:

$$\int_{SupC} \rho v dA = u \frac{\partial \rho}{\partial x} dx dy dz + \rho \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz + v \frac{\partial \rho}{\partial y} dx dy dz + \rho \frac{\partial v}{\partial y} dx dy dz + w \frac{\partial \rho}{\partial z} dx dy dz + \rho \frac{\partial w}{\partial z} dx dy dz$$

$$\int_{SupC} \rho v dA = \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Como es la derivada de un producto

$$\int_{SupC} \rho v dA = \left(\frac{\partial u \rho}{\partial x} + \frac{\partial v \rho}{\partial y} + \frac{\partial w \rho}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$\int_{SupC} \rho v dA = \vec{\nabla} \rho v dV$$

Lo que hicimos es analizar superficies de control a la izquierda y a la derecha del punto.

Si el proceso no fuera estacionario existe variación respecto del tiempo:

$$\frac{Dm}{Dt} = \int_{SupC} \rho v dA + \frac{d}{dt} \rho dx dy dz = \vec{\nabla} \rho v dV + \frac{d}{dt} \rho dx dy dz = 0$$

$$\frac{Dm}{Dt} = \vec{\nabla} \rho v dV + \frac{d}{dt} \rho dV = 0$$

$$\frac{Dm}{Dt} = \vec{\nabla} \rho v dV + \frac{d}{dt} \rho dV = 0$$

Los elementos de fluido es decir el volumen e control puede ser pequeño pero no puede ser nulo

$$\frac{Dm}{Dt} = \vec{\nabla} \rho v + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Si el proceso es estacionario la densidad permanece constante

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Nos quedaría el principio de conservación de masa igualado a cero:

$$\vec{\nabla} \rho v = 0$$

Si además decimos que es un fluido incompresible la densidad no varía espacialmente:

$$\vec{\nabla} v = 0$$

Lo que define al principio de conservación de la masa de un flujo estacionario incompresible.

Apuntes de Cátedra: Mecánica de los Fluidos e Hidráulica

Carrera: Ingeniería Industrial

En un análisis integral se pierde información, ya que es un análisis promedio. En general se analizan las propiedades de contorno como en el ejemplo de codo en una tubería que sucede cuando el fluido hace contacto con la superficie, como hacemos para contener las fuerzas.

Veremos un caso sencillo en el cual evidenciamos la necesidad del análisis diferencial en el principio de conservación de la masa.

Supongamos el curso de un río que tiene un nivel preestablecido y desea hacerse una compuerta, pero en un determinado lugar no se puede superar determinada velocidad porque, de contrario, se soplan las válvulas, cual es la mínima a la que se puede llevar la apertura de la compuerta para que no ocurra. Lo primero es dividir al volumen de control en las superficies de interés Sup 1, Sup 2, Sup 3, Sup 4 y Sup 5 finalmente aplicamos el principio de conservación de la masa, como la densidad permanece constante:

$$\int_{SupC} v dA = 0$$

Supongamos que inicialmente antes de abrir la compuerta hicimos un relevamiento y tomamos los niveles de altura y velocidad v_1 que representa la velocidad promedio de todas las partículas que ingresan a la superficie, aunque sabemos que las partículas, cada una de ellas tienen distinta velocidad, pero suponemos que sobre la superficie tienen una velocidad promedio.

Vamos a tomar una profundidad unitaria $e = 1$ por lo tanto la superficie de ingreso será $h_1 e = h_1$

Las superficies por las que no atraviesa flujo el vector velocidad será nulo por lo tanto tendremos:

$$-v_1 h_1 + v_4 h_4 = 0$$

Si despejamos:

$$v_4 = \frac{v_1 h_1}{h_4}$$

Podemos probar distintas alturas de h_4 y cuando supera la velocidad de socavación v_4 podemos fijar la altura según nuestra hipótesis. Más de esa altura no puede construirse porque se excede la velocidad límite. Todo a partir de un análisis integral.

Si quisiéramos plantear el problema de forma diferencial para un fluido incompresible tenemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Como estamos hablando únicamente de un fluido unidimensional sobre el eje x , varía la componente de u únicamente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$$

Apuntes de Cátedra: Mecánica de los Fluidos e Hidráulica

Carrera: Ingeniería Industrial

Es decir hay una variación de la velocidad respecto al eje x pero no puede igualarse a cero no hay una componente perpendicular a la hoja es decir eje z porque es un escurrimiento unidimensional por lo que no se estaría cumpliendo el principio de conservación de la masa.

Debemos incluir la variación de u respecto al eje y para que se anulen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

En este caso nos está diciendo que el escurrimiento no puede ser unidimensional tenemos una componente sobre el eje x y otra sobre el eje y. Es bidimensional, hay escurrimiento sobre el eje de las xy , de lo contrario no se cumple el principio de conservación de la masa.

Cuando tenemos un análisis diferencial aumenta la cantidad de información. En un análisis integral perdemos información.

A modo didáctico si se analiza el recorrido de una hormiga al hormiguero de acuerdo al análisis integral básicamente se aprecia la hormiga transportando comida desde un punto hacia el agujero, ahora si observamos la hormiga a través de una lupa veremos distintas actividades llevadas a cabo en el camino a casa por parte de la hormiga. Siempre hablamos del mismo fenómeno desde puntos de vista diferentes.

Cantidad de movimiento Análisis Diferencial

De acuerdo a lo visto anteriormente realizaremos el análisis diferencial para la cantidad de movimiento, tema clave para comprender en un futuro el fenómeno de lubricación:

Comenzaremos nuestro análisis con la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{dv}{dt}$$

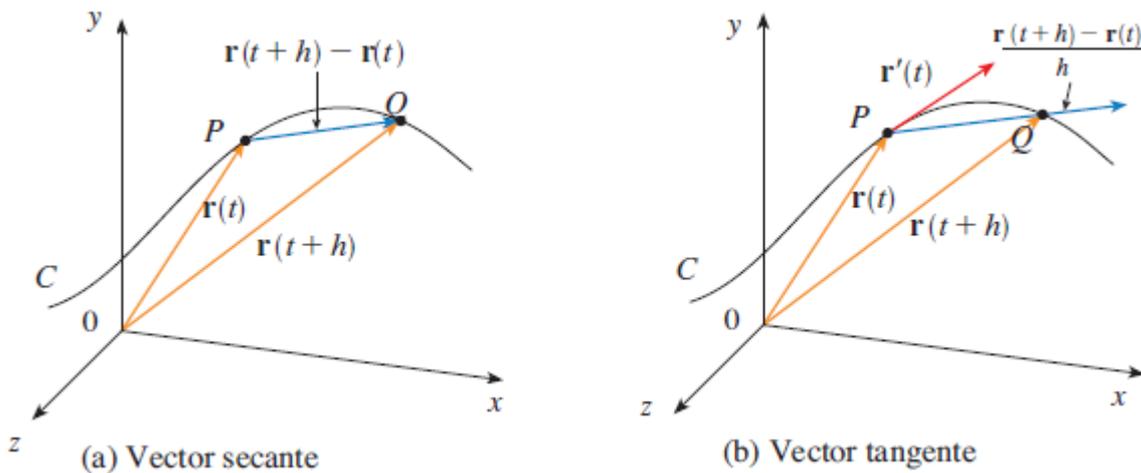
Las fuerzas que vamos a considerar como hasta el momento serán superficiales y másicas.

Como en este caso las partículas tienen distintas velocidades además de las fuerzas normales aparecerán las tensiones tangenciales.

Recordando que adquirimos cierta destreza en las deducciones hechas para la ecuación fundamental de la hidrostática podremos abordar este asunto.

Para el análisis de las presiones no tendremos problemas mayores, lo que no conocemos es como expresar la variación de velocidad que estará dada para cada una de sus componentes. Hasta el momento lo único que vimos con aceleración fue movimiento uniformemente acelerado donde teníamos a_x y a_z ya que no había movimiento relativo entre partículas. Pero describir en forma Euleriana la variación de velocidad respecto de los ejes aún no lo vimos. Nuevamente pasaremos de LaGrange a Euler.

Recordando la definición de derivada vectorial:



$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

Consideremos un campo de velocidades en forma general:

$$v = v(x, y, z)$$

La recta secante estará dada por:

$$v_{P(t+\Delta t)} - v_{P(t)}$$

Para el punto P y en el tiempo t la velocidad estará dada por:

$$v_{P(t)} = v(x, y, z, t)$$

Para el punto Q y en el tiempo t la velocidad estará dada por:

$$v_{P(t+\Delta t)} = v(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t)$$

Si aplicamos el diferencial total del vector velocidad v_p tendríamos:

$$dv_p = \frac{\partial v_p}{\partial x} dx + \frac{\partial v_p}{\partial y} dy + \frac{\partial v_p}{\partial z} dz + \frac{\partial v_p}{\partial t} dt$$

Si ahora buscamos la variación de la velocidad respecto del tiempo:

$$a_p = \frac{dv_p}{dt} = \frac{\partial v_p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_p}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_p}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial v_p}{\partial t} \frac{dt}{dt}$$

Las variaciones espaciales respecto del tiempo son las componentes de la velocidad para cada uno de los ejes:

$$a_p = \frac{\partial v_p}{\partial x} u + \frac{\partial v_p}{\partial y} v + \frac{\partial v_p}{\partial z} w + \frac{\partial v_p}{\partial t}$$

Si quisiéramos expresarlo en forma más comprimida tenemos:

$$a_p = \frac{\partial v_p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

Los vectores u, v y w son los componentes de la velocidad aplicados a cada uno de los ejes x, y, z. el segundo termino se lee \vec{v} escalar $\vec{\nabla}$ (nabla) aplicado a \vec{v} .

Podemos descomponer la aceleración para cada uno de los ejes, variación espacial de la velocidad y también respecto al tiempo

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w$$

A continuación estamos en condiciones describir en forma diferencial las fuerzas superficiales y másicas así como la aceleración. Pasamos de una derivada material a expresiones en torno a los ejes coordenados.

$$a_p = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

El primer término $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ se conoce como aceleración local y el segundo $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$ como aceleración convectiva.

La suma de ambos términos representa la ecuación de transporte de Reynolds.

La ecuación puede plantearse para cualquier propiedad por ejemplo la temperatura:

$$T_p = \frac{D\vec{T}}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{T} \cdot \vec{\nabla} T$$

Si tomáramos un cigarro y lo encendiéramos existe una variación de temperatura entre la punta del cigarro y una partícula circundante. Dado un volumen de control por ejemplo el aula y consideramos que tenemos pulmones infinitos podríamos afirmar que al cabo de un tiempo el salón tomará la temperatura del cigarro. Es más probable que nos muéranos de cáncer antes, pero eso es otra historia. Un fluido aún estático, propaga la variación de temperatura por la viscosidad que tiene. Podemos acelerar el proceso de transferencia colocando forzadores de viento, es decir si agregamos una variación espacial a la temperatura se hace un proceso más rápido.

Lo que nos dice la ecuación de transporte es que la madre naturaleza intenta llevar al equilibrio los estados, y esto refiere a la uniformidad de las propiedades que estamos analizando. Todo fenómeno que se genera tiende a propagarse buscando un estado de equilibrio.

Rotación de un fluido

Antes de comenzar el estudio propio de la Mecánica de fluidos, como ser, adentrarnos en las ecuaciones de Navier-Stokes, para no perder de vista el fenómeno, con tantas derivadas parciales veremos la rotación de un fluido.

La expresión:

$$a_p = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

La expresión anterior nos dice que dentro de un campo de velocidades existe un vector velocidad para cada partícula por lo que hay una variación espacial.

Nuestra premisa es que efecto puede producir nuestro campo de velocidad a un cuerpo por ejemplo un "copo de algodón", muy simple principio de superposición de efectos. En principio todas las velocidades son iguales. El algodón puede trasladarse como un sólido, puede rotar como un sólido o bien puede deformarse, o pueden ocurrir los tres casos simultáneamente.

Supongamos únicamente que la partícula rota como un sólido. El punto A pasa a A' y B pasa a B'. Los segmentos A-A' y B-B' no son iguales porque nadie dice que es un diferencial volumen cuadrado.

Se define el vector rotación:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

ω_x Vector velocidad que está rotando en el plano yz .

ω_y Vector velocidad que está rotando en el plano xz .

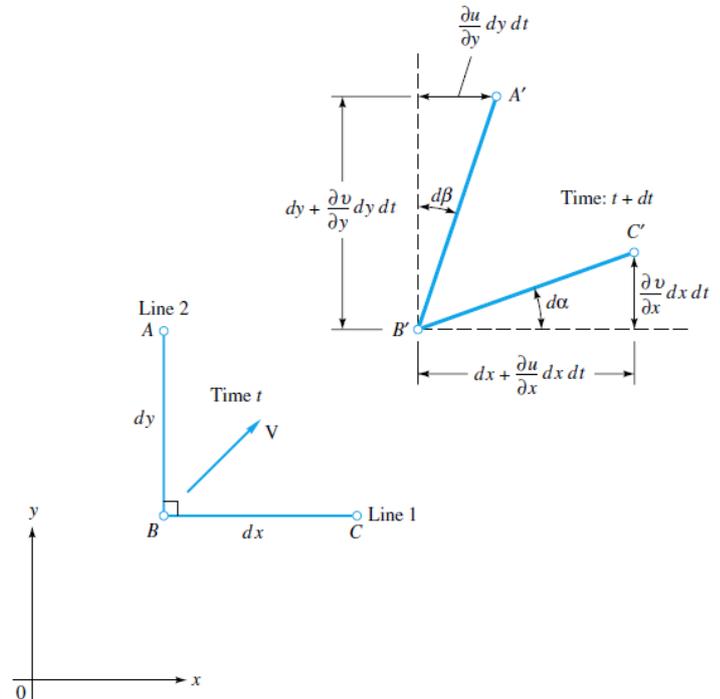
ω_z Vector velocidad que está rotando en el plano xy .

Se define cada vector velocidad como el promedio de las velocidades angulares de dos rectas mutuamente perpendiculares que pasan por el centro de la partícula.

Si el cuerpo rotó y adoptamos como convención positiva en el sentido antihorario. Para que A pase a A' la componente vertical en O tiene que ser mayor a la horizontal en A, de lo contrario, si fueran iguales rota como un rígido.

Si aplicamos serie de Taylor al segmento O-A tenemos:

$$v_A = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$$



También podemos aclarar que ω es el ángulo barrido por unidad de tiempo.

$$\omega_x = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

$$\omega_y = \frac{\Delta\beta}{\Delta t}$$

$$\omega_z = \frac{\Delta\gamma}{\Delta t}$$

Como en Mecánica de fluidos llevamos a los ángulos a unidades trigonométricas o primarias:

$$\omega_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \lim_{y+\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta\eta}{\Delta x}}{\Delta t} = \lim_{y+\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{\Delta\eta}{\Delta t}$$

$\frac{\Delta\eta}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$ Es el desplazamiento realizado por el punto A en exceso desde A a A'.

Por lo tanto:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$$

$$\omega_x = \omega_{0A} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Si aplicamos serie de Taylor al segmento O-A tenemos:

La velocidad en el punto B tiene que ser menor a la del punto O de otra forma se movería como un rígido, si hacemos el mismo análisis:

$$\omega_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \lim_{x+\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta y}}{\Delta t} = \lim_{x+\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}$$

$\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$ Es el desplazamiento realizado por el punto A en exceso desde O a B.

Por lo tanto:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$$

$$\omega_y = \omega_{0B} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Por lo tanto ω_y es el promedio de dichas velocidades:

$$\omega_z = \frac{1}{2}(\omega_{0A} + \omega_{0B})$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) k$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) i$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) j$$

Recordando nuestro análisis inicial:

$$\vec{\omega} = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) k$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

El término anterior se conoce como rotor de velocidad $\vec{\nabla} \times \vec{v}$.

A partir de este punto tenemos una distorsión angular.

$$\gamma = \alpha + \beta$$

A medida que α crece β disminuye.

La relación de deformación angular del elemento del fluido es la relación de deformación del ángulo entre las líneas OA y OB. La relación está dada por:

$$-\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}$$

Es negativo porque a medida que α crece β disminuye.

Recordando las definiciones previas, la deformación angular en el plano x-y es:

$$-\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}$$

Apuntes de Cátedra: Mecánica de los Fluidos e Hidráulica

Carrera: Ingeniería Industrial

Cuál es la interpretación física de este fenómeno, supongamos un campo de velocidad en el plano x-y , con su diferencial volumen $dV = dx dy dz$ además existe una masa de un fluido que lo atraviesa, la velocidad varía para cada punto del campo. Por algún método levantamos e introducimos nuestro copo de algodón dentro del campo. Dependiendo de las características del campo de velocidad, puede rotar como un rígido, puede distorsionarse o puede sufrir un efecto de tracción compresión, o bien todo simultáneamente.

Las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$, permiten la rotación como un rígido, si además se suman o restan producen distorsiones angulares.

De acuerdo a la combinación de estas derivadas parciales que definen las características del campo de velocidad creado por la naturaleza, el copo de algodón rota o se traslada como un rígido, se distorsiona o sufre un efecto de tracción compresión.

El copo de algodón desarrolla su trayectoria de acuerdo a las características impuestas por el campo de velocidades, apareciendo así las tensiones tangenciales y normales sobre el mismo.

El campo de velocidades en principio existe, más adelante veremos que las variaciones espaciales de velocidades son producidas por una bomba.

El problema principal que vamos a tener en la siguiente clase surgirá al plantear la segunda ley de Newton, tendremos 9 vectores velocidad y 3 componentes de la aceleración, en definitiva tendremos 12 incógnitas, vamos a intentar reducir estas incógnitas vinculando ecuaciones con otras lo que se conoce como Ecuaciones Constitutivas, para finalmente llegar a la ecuación madre de la mecánica de fluidos que se conoce como Ecuación de Navier-Stokes.

Ecuación de Navier-Stokes

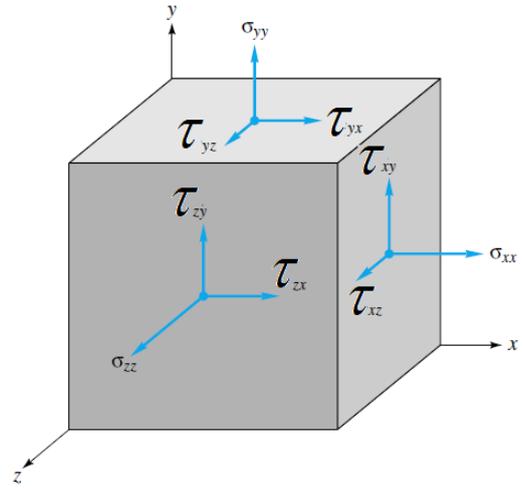
Vamos a realizar el análisis diferencial para una de las direcciones de las fuerzas superficiales en nuestro caso el eje de las x ; por analogía las restantes ocurren lo mismo.

Vemos las tensiones normales sobre el eje de las x y las tensiones tangenciales que van a tener proyecciones sobre el eje de las x , estas últimas tienen lugar detrás del prisma sobre la hoja y saliente al prisma

En el centro del cubo conocemos las fuerzas superficiales es decir detrás del prisma tendremos $\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \frac{dx}{2}$ y delante del prisma

$$\text{tenemos } \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

Otro lugar donde tenemos esfuerzos tangenciales es sobre el prisma $\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2}$ y debajo del prisma $\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2}$.



Sobre el prisma debería dibujarse las demás tensiones tangenciales, debido a la complejidad solo lo haremos para el eje x .

A diferencia de las fuerzas superficiales hasta el momento por ejemplo aquellas debidas exclusivamente a la presión que venimos dibujando con sentido entrante a la superficie. Por convención dibujaremos las tensiones superficiales positivas salientes a la superficie, la convención objetiva define a una tensión es positiva cuando los dos índices son positivos o los dos índices son negativos.

Por ejemplo una tensión cualquiera es positiva cuando los subíndices $i > 0$ y $j > 0$ o bien $i < 0$ y $j < 0$ el primer subíndice hace alusión a la superficie del vector y el segundo a la dirección del vector. Para que sea positivo la superficie debe estar definida por un versor proyectado sobre un eje positivo y la dirección positiva o bien la superficie debe estar definida por un versor proyectado sobre un eje negativo y la dirección negativa.

Antes las tensiones normales eran debidas exclusivamente a la presión sobre una superficie, y lo indicábamos con la letra P_x ahora hablamos de movimiento relativo entre partículas por lo tanto, la tensión normal queda definida también por la variación de velocidad sobre su mismo eje y lo indicamos como σ_{xx} . Si el escurrimiento es unidimensional dadas dos partículas que se mueven a diferentes velocidades una arrastra a la otra generando además tensiones tangenciales τ_{yx} y τ_{zx} . La presión es una de las componentes de la tensión normal.

Para el eje x - x :

$$dF_x = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy$$

$$dF_x = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz$$

$$dF_x = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Para el eje y :

$$dF_y = \left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz + \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy$$

$$- \left(\sigma_{yy} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(\tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz - \left(\tau_{zy} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy$$

$$dF_y = \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dx dy dz$$

$$dF_y = \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Para el eje z :

$$dF_z = \left(\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz$$

$$- \left(\sigma_{zz} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left(\tau_{yz} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(\tau_{xz} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz$$

$$dF_z = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx dy dz$$

$$dF_z = \left(\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \right) dx dy dz$$

Si la fuerza de gravedad es la única fuerza másica que actúa tendremos:

$$dF = dF_{\text{sup}} + dF_{\text{mas}}$$

$$dF = dF_x + dF_y + dF_z + \rho g_x dx dy dz + \rho g_y dx dy dz + \rho g_z dx dy dz$$

$$dF_x = \left[\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \right] dx dy dz$$

$$dF_y = \left[\left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y \right] dx dy dz$$

$$dF_z = \left[\left(\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \right] dx dy dz$$

Recordando la definición de aceleración:

$$a_p = \frac{\partial v_p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

Igualando para cada una de las componentes:

$$dF_x = \left[\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \right] dx dy dz = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) dx dy dz$$

$$dF_y = \left[\left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y \right] dx dy dz = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right) dx dy dz$$

$$dF_z = \left[\left(\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \right] dx dy dz = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right) dx dy dz$$

Las tres ecuaciones anteriores definen el principio de conservación de movimiento a partir de la segunda ley de Newton, para encontrar la solución debemos integrar. En principio uno de los inconvenientes es que tenemos 9 incógnitas que son las componentes de las fuerzas superficiales y 3 componentes de la velocidad. Vamos a vincular distintas ecuaciones para reducir el número de incógnitas.

Recordando la ecuación que vincula a las fuerzas superficiales con la velocidad, planteado en el primer día de clases. Sabemos que existe una ecuación que vincula a las fuerzas superficiales, en este caso a las tensiones tangenciales con un campo de velocidades. Estas ecuaciones auxiliares se denominan Ecuaciones Constitutivas, únicamente validas para fluidos Newtonianos, es decir validos para la primera potencia.

Para un escurrimiento unidimensional habíamos concluido que:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}$$

Ahora tendremos movimiento tridimensional en u, v, w , por ahora vamos a inferir que esta es la vinculación, al finalizar el tema lo demostraremos:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \qquad \sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \qquad \sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \qquad \sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} \right) = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-p - \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + \rho g_x$$

Al ser un fluido incompresible:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} \right) = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} \right) = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{Du}{Dt} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

Por hipótesis fluido incompresible, principio de conservación de la masa la densidad es constante:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Finalmente, volvemos a la ecuación original:

$$dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right)$$

$$dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right)$$

$$dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right)$$

Las ecuaciones planteadas volvemos a recordar son para fluidos Newtonianos e incompresibles.

Las tres ecuaciones anteriores se conocen como ecuación de Navier-Stokes, que puede expresarse de forma general como sigue:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = -\bar{\nabla} p + \rho \bar{g} + \mu \bar{\nabla}^2 \cdot \bar{v}$$

La ecuación tiene cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas u , v , w y p . Tres ecuaciones diferenciales y la ecuación de continuidad.

Los tres términos de la ecuación resultan una suma de vectores, $-\bar{\nabla} p$ es un operador matemático de carácter vectorial, la gravedad es vectorial $\rho \bar{g}$ y además $\bar{\nabla}^2 = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}$ es un escalar pero el producto $\mu \bar{\nabla}^2 \cdot \bar{v}$ es un vector.

El término $\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right)$ representa el copo de velocidades

$-\bar{\nabla} p$ Fuerzas superficiales provenientes del gradiente de presión

$\mu \bar{\nabla}^2 \cdot \bar{v}$ Proviene de las tensiones σ y τ .

$\rho \bar{g}$ Fuerzas másicas

Recordando el copo de algodón, éste estará sujeto a las características del campo de velocidades, se moverá siempre que exista un gradiente de presión, al moverse se generan las tensiones que tiene a hacerlo rotar como un rígido deformarlo, distorsión angular, fenómeno de tracción-compresión.

Veamos detenidamente el producto $\bar{\nabla}^2 \cdot \bar{v}$; si fuera un escurrimiento unidimensional. Si tenemos un plano x-y y el vector velocidad está contenido en el eje x. Recordamos el caso de las placas paralelas. Es decir si no existe un

gradiente de presión $\frac{\partial p}{\partial x}$ el escurrimiento es lineal. Vemos que la $\frac{\partial u}{\partial x} = cte$ y por lo tanto $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, la derivada

segunda no es nula cuando por ejemplo el perfil de velocidades de una parábola. Físicamente $\bar{\nabla}^2$ es también parte de la ecuación de transporte y aparece sólo cuando el escurrimiento no es lineal. Es decir cuando las partículas

Apuntes de Cátedra: Mecánica de los Fluidos e Hidráulica

Carrera: Ingeniería Industrial

siguen trayectorias que cruzan con las de otras es decir hay entrecruzamiento, transferencia de cantidad de movimiento. De alguna manera $\overline{\nabla}^2$ mide el grado de desorden entendiéndose por desorden al entrecruzamiento de las capas del fluido. La transferencia en flujos laminares, que son los casos que analizamos, se hace a través de pequeños paquetes de masa, de lo contrario sería turbulento.

Ecuación fundamental de la hidrostática a partir de Navier-Stokes

Consideramos un fluido en reposo, podemos hacer el siguiente análisis a partir de Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = -\bar{\nabla} p + \rho \bar{g} + \mu \bar{\nabla}^2 \cdot \bar{v}$$

$$dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \text{ No tenemos variación espacial de velocidad.}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) = 0 \text{ No tenemos variación espacial de velocidad.}$$

$$\rho g_x = 0 \text{ No hay gravedad en el eje de las } x.$$

$$dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = 0 \text{ No tenemos variación espacial de velocidad.}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right) = 0 \text{ No tenemos variación espacial de velocidad.}$$

$$\rho g_y = 0 \text{ No hay gravedad en el eje de las } y.$$

$$dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \text{ No tenemos variación espacial de velocidad.}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right) \text{ No tenemos variación espacial de velocidad.}$$

$$\rho g_z \neq 0 \text{ Hay gravedad en el eje de la } z.$$

Apuntes de Cátedra: Mecánica de los Fluidos e Hidráulica

Carrera: Ingeniería Industrial

Sumado todos los miembros:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g_z$$

$$-\frac{dp}{dz} = \rho g_z$$

$$dp = \rho g_z dz$$

$$\int dp = \rho g_z \int dz$$

$$p = \rho g_z z + c$$

Para $z = H \rightarrow P = P_{atm}$

$$c = P_{atm} - \rho g H$$

Finalmente:

$$p = \rho g z + P_{atm} - \rho g H$$

$$p = P_{atm} - \rho g (H - z)$$

$$p = P_{atm} - \rho g h$$

La ecuación fundamental de la hidrostática es un caso particular de la ecuación de Navier-Stokes, donde no tenemos variación espacial de velocidad, no existe movimiento relativo entre partículas.

Análisis Tensorial

A forma de concluir el análisis veremos cómo se relacionan las tensiones superficiales con la variación espacial del campo de velocidades.

Las líneas bajo los vectores indican que son vectores.

Consideremos un campo de velocidades en un punto P , definido por un vector desplazamiento \underline{R} en el tiempo t :

$$\underline{v} : \underline{v}_{(R,t)}$$

Y para el punto Q , el vector \underline{R} sufre un incremento $\underline{R} + d\underline{R}$ el tiempo t permanece constante

$$\underline{v} : \underline{v}_{(R+dR,t)}$$

Describiremos una variación vectorial del campo de velocidades.

Recordando la serie de Taylor para una función escalar:

$$f_{x_0} \approx P_{x_0} = f_{x_0} + f'_{x_0}(x - x_0) + \frac{f''_{x_0}}{2!}(x - x_0)^2 + \dots +$$

Si aplicamos la serie de Taylor a este campo de velocidades tenemos:

$$\underline{v} : \underline{v}_{(R+dR)} = \underline{v}_{(R)} + d\underline{R} \cdot \overline{\nabla} \underline{v} + \dots + \text{Términos de orden superior.}$$

La componente en x es:

$$i(\underline{u}_{(R+dR)}) = u_{(R)} + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$d\underline{R} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$, que tiene proyección sobre x - z , podemos expresarlo como

$$d\underline{R} = dx\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_i$$

Esta última notación se utiliza en los modelos numéricos ya que en vez de llamar a los ejes x, y, z se los llama 1,2,3.

El término $\overline{\nabla} \underline{v}$ que se lee nabla aplicado a \underline{v} , gradiente de un campo vectorial, se denomina tensor. Para su completa determinación, se deben especificar nueve o más componentes escalares, recordemos que los escalares se denominan tensores de orden cero y los vectores son tensores de primer orden. Ejemplos de estas magnitudes son la tensión, la deformación unitaria.

Un campo está constituido por una distribución continua de magnitudes escalares, vectoriales o tensoriales, definidas mediante funciones continuas del punto y del tiempo, ya que una magnitud puede variar no solo de un punto a otro, sino también, en un punto fijo, de un instante a otro.

A partir de ahora y a sabiendas que estamos cometiendo un error, para no complicar la existencia llamaremos tensores únicamente a los de orden dos, es decir, a las tensiones.

Otra forma de ver $\nabla \bar{v}$, gradiente de un campo vectorial es la siguiente:

$$\begin{aligned}\nabla \bar{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) (v_x i + v_y j + v_z k) \\ \nabla \bar{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} v_x i i + \frac{\partial}{\partial y} v_x i j + \frac{\partial}{\partial z} v_x i k \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} v_x j i + \frac{\partial}{\partial y} v_x j j + \frac{\partial}{\partial z} v_x j k \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} v_x k i + \frac{\partial}{\partial y} v_x k j + \frac{\partial}{\partial z} v_x k k \right) \\ \nabla \bar{v} &= \frac{\partial}{\partial x} v_x i i + \frac{\partial}{\partial y} v_x i j + \frac{\partial}{\partial z} v_x i k + \frac{\partial}{\partial x} v_x j i + \frac{\partial}{\partial y} v_x j j + \frac{\partial}{\partial z} v_x j k + \frac{\partial}{\partial x} v_x k i + \frac{\partial}{\partial y} v_x k j + \frac{\partial}{\partial z} v_x k k\end{aligned}$$

Otra forma de ver $\nabla \bar{v}$, gradiente de un campo vectorial es la siguiente:

$$\begin{aligned}\nabla \bar{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) (u i + v j + w k) \\ \nabla \bar{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} u i i + \frac{\partial}{\partial y} u i j + \frac{\partial}{\partial z} u i k \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} v j i + \frac{\partial}{\partial y} v j j + \frac{\partial}{\partial z} v j k \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} w k i + \frac{\partial}{\partial y} w k j + \frac{\partial}{\partial z} w k k \right) \\ \nabla \bar{v} &= \frac{\partial}{\partial x} u i i + \frac{\partial}{\partial y} u i j + \frac{\partial}{\partial z} u i k + \frac{\partial}{\partial x} v j i + \frac{\partial}{\partial y} v j j + \frac{\partial}{\partial z} v j k + \frac{\partial}{\partial x} w k i + \frac{\partial}{\partial y} w k j + \frac{\partial}{\partial z} w k k\end{aligned}$$

Otra forma de ver $\nabla \bar{v}$, gradiente de un campo vectorial es la siguiente:

$$\begin{aligned}\nabla \bar{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} 1 + \frac{\partial}{\partial y} 2 + \frac{\partial}{\partial z} 3 \right) (v_1 1 + v_2 2 + v_3 3) \\ \nabla \bar{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} v_1 11 + \frac{\partial}{\partial x_2} v_1 12 + \frac{\partial}{\partial x_3} v_1 13 \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} v_2 21 + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 22 + \frac{\partial}{\partial x_3} v_2 23 \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} v_3 31 + \frac{\partial}{\partial x_2} v_3 32 + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 33 \right) \\ \nabla \bar{v} &= \frac{\partial}{\partial x_1} v_1 11 + \frac{\partial}{\partial x_2} v_1 12 + \frac{\partial}{\partial x_3} v_1 13 + \frac{\partial}{\partial x_1} v_2 21 + \frac{\partial}{\partial x_2} v_2 22 + \frac{\partial}{\partial x_3} v_2 23 + \frac{\partial}{\partial x_1} v_3 31 + \frac{\partial}{\partial x_2} v_3 32 + \frac{\partial}{\partial x_3} v_3 33\end{aligned}$$

Podemos utilizar la siguiente notación:

$$\begin{aligned}\nabla \bar{v} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} e_i \right) (\bar{v} \cdot e_j e_j) = \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) e_i e_j \\ d\bar{R} \cdot \nabla \bar{v} &= dx_k e_k \cdot \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) e_i e_j = \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) dx_k e_j\end{aligned}$$

e_i Hace alusión a la derivada parcial.

Vamos a desarrollar el término $\overline{\nabla v}$

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{v}_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} u & v & w \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & x \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & y \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} & z \end{pmatrix}$$

Como analogía, consideremos un mazo de cartas, una baraja de la serie española, por ejemplo el que se usa para jugar al truco. Imaginemos que $\overline{\nabla v}$ es el mazo que contiene todas las cartas. Básicamente el mazo está compuesto por 40 cartas y 4 familias o palos. Las variaciones espaciales a las que está sujeta la partícula dentro del campo de velocidades, rotación, traslación, deformación distorsión angular, combinación de ellos, son debidas a las derivadas parciales y a su combinación.

Dentro de la matriz anterior están las acciones provocadas naturalmente por el campo que son capaces de provocar algún fenómeno sobre la partícula. Mazo de cartas completo. La pregunta consecuente surge entonces, es posible descomponer a la mencionada matriz en efectos que son de nuestro conocimiento, para ello vamos a aplicar algunas operaciones propias de tensores.

Por propiedades de tensores que admitiremos sin demostración se cumple que:

$$\overline{\nabla v} = \frac{1}{2} \left[\overline{\nabla v} + (\overline{\nabla v})^t \right] + \frac{1}{2} \left[\overline{\nabla v} - (\overline{\nabla v})^t \right]$$

$(\overline{\nabla v})^t$ Refiere a cambiar filas por columnas de la matriz anterior.

$$\overline{S} = \frac{1}{2} \left[\overline{\nabla v} + (\overline{\nabla v})^t \right] \text{ Se denomina Tensor simétrico.}$$

$$\overline{\Omega} = \frac{1}{2} \left[\overline{\nabla v} - (\overline{\nabla v})^t \right] \text{ Se denomina Tensor Antisimétrico}$$

Para el vector simétrico:

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{v}_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} u & v & w \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & x \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & y \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} & z \end{pmatrix} \quad (\overline{\nabla} \cdot \overline{v})^t = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} u & v & w \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & x \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & y \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} & z \end{pmatrix}$$

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \left[\overline{\nabla v} + (\overline{\nabla v})^t \right] = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} u & v & w & & & \\ \frac{\partial v1}{\partial x1} & \frac{\partial v2}{\partial x1} & \frac{\partial v3}{\partial x1} & x & & \\ \frac{\partial v1}{\partial x2} & \frac{\partial v2}{\partial x2} & \frac{\partial v3}{\partial x2} & & y & \\ \frac{\partial v1}{\partial x3} & \frac{\partial v2}{\partial x3} & \frac{\partial v3}{\partial x3} & & & z \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc|ccc} u & v & w & & & \\ \frac{\partial v1}{\partial x1} & \frac{\partial v1}{\partial x2} & \frac{\partial v1}{\partial x3} & x & & \\ \frac{\partial v2}{\partial x1} & \frac{\partial v2}{\partial x2} & \frac{\partial v2}{\partial x3} & & y & \\ \frac{\partial v3}{\partial x1} & \frac{\partial v3}{\partial x2} & \frac{\partial v3}{\partial x3} & & & z \end{array} \right]$$

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \left[\overline{\nabla v} + (\overline{\nabla v})^t \right] = \begin{pmatrix} u & v & w \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v1}{\partial x1} + \frac{\partial v1}{\partial x1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v2}{\partial x1} + \frac{\partial v1}{\partial x2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v3}{\partial x1} + \frac{\partial v1}{\partial x3} \right) & x \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v1}{\partial x2} + \frac{\partial v2}{\partial x1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v2}{\partial x2} + \frac{\partial v2}{\partial x2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v3}{\partial x2} + \frac{\partial v2}{\partial x3} \right) & y \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v1}{\partial x3} + \frac{\partial v3}{\partial x1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v2}{\partial x3} + \frac{\partial v3}{\partial x2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v3}{\partial x3} + \frac{\partial v3}{\partial x3} \right) & z \end{pmatrix}$$

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \left[\overline{\nabla v} + (\overline{\nabla v})^t \right] = \begin{pmatrix} u & v & w \\ \frac{\partial v1}{\partial x1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v2}{\partial x1} + \frac{\partial v1}{\partial x2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v3}{\partial x1} + \frac{\partial v1}{\partial x3} \right) & x \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v1}{\partial x2} + \frac{\partial v2}{\partial x1} \right) & \frac{\partial v2}{\partial x2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v3}{\partial x2} + \frac{\partial v2}{\partial x3} \right) & y \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v1}{\partial x3} + \frac{\partial v3}{\partial x1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v2}{\partial x3} + \frac{\partial v3}{\partial x2} \right) & \frac{\partial v3}{\partial x3} & z \end{pmatrix}$$

Para el vector antisimétrico:

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \left[\overline{\nabla v} - (\overline{\nabla v})^t \right] = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} u & v & w & & & \\ \frac{\partial v1}{\partial x1} & \frac{\partial v2}{\partial x1} & \frac{\partial v3}{\partial x1} & x & & \\ \frac{\partial v1}{\partial x2} & \frac{\partial v2}{\partial x2} & \frac{\partial v3}{\partial x2} & & y & \\ \frac{\partial v1}{\partial x3} & \frac{\partial v2}{\partial x3} & \frac{\partial v3}{\partial x3} & & & z \end{array} \right] - \left[\begin{array}{ccc|ccc} u & v & w & & & \\ \frac{\partial v1}{\partial x1} & \frac{\partial v1}{\partial x2} & \frac{\partial v1}{\partial x3} & x & & \\ \frac{\partial v2}{\partial x1} & \frac{\partial v2}{\partial x2} & \frac{\partial v2}{\partial x3} & & y & \\ \frac{\partial v3}{\partial x1} & \frac{\partial v3}{\partial x2} & \frac{\partial v3}{\partial x3} & & & z \end{array} \right]$$

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} \left[\overline{\nabla v} - (\overline{\nabla v})^t \right] = \begin{pmatrix} u & v & w \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v1}{\partial x1} - \frac{\partial v1}{\partial x1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v2}{\partial x1} - \frac{\partial v1}{\partial x2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v3}{\partial x1} - \frac{\partial v1}{\partial x3} \right) & x \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v1}{\partial x2} - \frac{\partial v2}{\partial x1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v2}{\partial x2} - \frac{\partial v2}{\partial x2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v3}{\partial x2} - \frac{\partial v2}{\partial x3} \right) & y \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v1}{\partial x3} - \frac{\partial v3}{\partial x1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v2}{\partial x3} - \frac{\partial v3}{\partial x2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v3}{\partial x3} - \frac{\partial v3}{\partial x3} \right) & z \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{\Omega}} = \frac{1}{2} \left[\bar{\nabla} \bar{v} - (\bar{\nabla} \bar{v})^t \right] = \begin{pmatrix} u & v & w \\ 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

Si ahora calculamos $\bar{\nabla} \times \bar{v}$ obtenemos:

$$\bar{\nabla} \times \bar{v} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{1} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{2} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{3}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{v} = \omega_{x_1} \mathbf{1} + \omega_{x_2} \mathbf{2} + \omega_{x_3} \mathbf{3}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{v} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \\ i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{v} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$$

El tensor antisimétrico $\bar{\bar{\Omega}}$ debido a que son ceros los términos de la derivada principal, tiene componentes del rotor de velocidad, el cual explica la rotación de un fluido considerando el mismo como un rígido, por lo tanto se descarta el tensor antisimétrico $\bar{\bar{\Omega}}$.

La analogía con el mazo de cartas es la siguiente, para ganar el juego no todas las cartas tienen el mismo valor, $\bar{\nabla} \bar{v}$ representa el mazo, pero si queremos encontrar la relación entre las tensiones tangenciales y la variación del campo de velocidades no todos los términos son importantes.

Para que existan tensiones tangenciales debe haber movimiento relativo entre partículas, cuando vimos rotación de un fluido demostramos que $\bar{\nabla} \times \bar{v}$ rota como un sólido por lo tanto no existe variación espacial de las partículas, por lo tanto el tensor antisimétrico $\bar{\bar{\Omega}}$ no está relacionado con las tensiones tangenciales.

Vamos a descomponer el tensor simétrico, los efectos en los que podemos descomponerlo son tracción compresión, distorsión angular y tensiones tangenciales.

Al eliminar el vector antisimétrico, para seguir haciendo la analogía podemos decir que dejamos de lado los palos de copa y de oro. Nos quedamos únicamente con la espada y el vasto.

Uno de ellos va a contener a los términos de la derivada principal efecto de tracción compresión y el otro tendrá las distorsiones angulares es decir las tensiones tangenciales.

$$\bar{\underline{S}} = \bar{\underline{S}}_1 + \bar{\underline{S}}_2$$

$\bar{\underline{S}}_1$ Tensor Isotrópico

$\bar{\underline{S}}_2$ Tensor deviatorio

$$\bar{\underline{S}}_1 = \frac{1}{3} [\underline{U} : \underline{S}] \underline{U}$$

El término $[\underline{U} : \underline{S}]$ se lee doble contracción. Es un doble producto escalar que da por resultado un número.

El tensor \underline{U} tiene valor únicamente en los términos de la derivada principal, podríamos decir que es una matriz identidad:

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto únicamente sobreviven los términos de la derivada principal:

$$\bar{\underline{S}}_1 = \frac{1}{3} [S_{11} + S_{22} + S_{33}] = \frac{1}{3} \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right]$$

El 3 pertenece al promedio de los tres términos el 1 le da carácter tensorial. Los $[S_{11} + S_{22} + S_{33}]$ son los términos de la derivada principal, efectos de tracción compresión, tensor isotrópico. $\bar{\underline{S}}_2 (\underline{S} - \bar{\underline{S}}_1)$ Hace referencia a la distorsión angular deviatorio. Estos son las características del campo de velocidades.

$$\bar{\underline{S}} = \bar{\underline{S}}_1 + \bar{\underline{S}}_2 = \frac{1}{3} [\underline{U} : \underline{S}] \underline{U} + (\underline{S} - \bar{\underline{S}}_1)$$

$$\underline{S} = \frac{1}{2} [\underline{\nabla} \underline{v} + (\underline{\nabla} \underline{v})^T]$$

Podemos decir que las tensiones tangenciales tienen una estructura similar:

$$\underline{\tau} = \frac{1}{3} [\underline{U} : \underline{\tau}] \underline{U} + \left(\underline{\tau} - \frac{1}{3} [\underline{U} : \underline{\tau}] \underline{U} \right)$$

El tensor $\underline{\tau}$ está relacionado linealmente con la deformación que sufre el fluido.

Para un escurrimiento unidimensional $\tau_{yx} \approx \frac{\partial u}{\partial y}$ nos falta hallar la constante de proporcionalidad.

$$\frac{1}{3}[\underline{U} : \underline{\tau}] \underline{U} = C_1 \frac{1}{3}[\underline{U} : \underline{S}] \underline{U}$$

$$\left(\underline{\tau} - \frac{1}{3}[\underline{U} : \underline{\tau}] \underline{U} \right) = C_2 \left(\underline{S} - \frac{1}{3}[\underline{U} : \underline{S}] \underline{U} \right)$$

$$C_1 = 3K_b$$

Donde C_1 es una constante de proporcionalidad y se relaciona con K_b que se denomina "Bull Coef" o coeficiente volumétrico. Básicamente refiere a la capacidad que tiene el fluido para transportar en un proceso de mezcla como por ejemplo cuando se disuelve cloro en una planta potabilizadora de agua. Para nosotros los fluidos son homogéneos, en fluidos heterogéneos que se ven en Ingeniería Química se estudia en profundidad.

$$C_2 = 2\mu$$

Donde C_2 es una constante de proporcionalidad y se relaciona con μ que se denomina viscosidad de corte.

$$\tau = K_b [\underline{U} : \underline{S}] \underline{U} + 2\mu \left(\underline{S} - \frac{1}{3}[\underline{U} : \underline{S}] \underline{U} \right)$$

$$\tau = K_b [\underline{U} : \underline{S}] \underline{U} + 2\mu \underline{S} - 2\mu \frac{1}{3}[\underline{U} : \underline{S}] \underline{U}$$

$$\tau = \left[K_b - 2\mu \frac{1}{3} \right] [\underline{U} : \underline{S}] \underline{U} + 2\mu \underline{S}$$

$$\tau = \left[K_b - \frac{2}{3} \mu \right] [\underline{U} : \underline{S}] \underline{U} + 2\mu \underline{S}$$

Finalmente si expresamos las tensiones normales:

$$\sigma_{11} = \left[-\frac{2}{3} \mu \overline{\nabla v} \right] + 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

$$\sigma_{xx} = \left[-\frac{2}{3} \mu \overline{\nabla v} \right] + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{22} = \left[-\frac{2}{3} \mu \overline{\nabla v} \right] + 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2}$$

$$\sigma_{yy} = \left[-\frac{2}{3} \mu \overline{\nabla v} \right] + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{33} = \left[-\frac{2}{3} \mu \overline{\nabla v} \right] + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$\sigma_{zz} = \left[-\frac{2}{3} \mu \overline{\nabla v} \right] + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\underline{\underline{\tau}} = \left[K_b - \frac{2}{3} \mu \right] \left[\underline{\underline{U}} : \underline{\underline{S}} \right] \underline{\underline{U}} + 2 \mu \underline{\underline{S}}$$

$$\tau_{12} = 2 \mu \underline{\underline{S}} = 2 \mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

$$\tau_{12} = 2 \mu \underline{\underline{S}} = \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

$$\tau_{xy} = 2 \mu \underline{\underline{S}} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

El análisis tensorial que relaciona tensiones y deformaciones angulares en mecánica estructural se llama mecánica de los continuos. Se tomó como base este análisis para relacionar las tensiones tangenciales con las variaciones especiales del campo de velocidad.

La próxima clase veremos qué más podemos aprehender a partir de la ecuación diferencial de Navier-Stokes, sin la necesidad de integrarlas, es decir que podemos aprender acerca de su escurrimiento. Para ellos vamos a trabajar con un fluido ideal, es decir eliminaremos la viscosidad.

Repaso. Variación espacial del campo de velocidades

La clase pasada encontramos las relaciones entre las tensiones tangenciales y la variación espacial del campo de velocidades:

$$\underline{\underline{\tau}} = \left[K_b - \frac{2}{3} \mu \right] \left[\underline{\underline{U}} : \underline{\underline{S}} \right] \underline{\underline{U}} + 2\mu \underline{\underline{S}}$$

El coeficiente volumétrico K_b es nulo. EL término $\left[\underline{\underline{U}} : \underline{\underline{S}} \right]$ representa los términos ubicados sobre la derivada principal, además de ser un doble producto escalar es un número. Por otro lado $\underline{\underline{U}}$ le da carácter tensorial. Para este caso el tensor $\underline{\underline{S}}_{11}$ tenemos.

$$\underline{\underline{\tau}} = \left[K_b - \frac{2}{3} \mu \right] \left[\underline{\underline{U}} : \underline{\underline{S}} \right] \underline{\underline{U}} + 2\mu \underline{\underline{S}}_{11}$$

$$\sigma_{11} = \left[-\frac{2}{3} \mu \overline{\nabla \cdot \vec{v}} \right] + 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$$

$$\tau_{12} = 2\mu \underline{\underline{S}} = \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

Dicha expresión la pudimos encontrar con las llamadas ecuaciones constitutivas. Su objetivo es reducir el número de incógnitas. Hallamos que $\overline{\nabla \cdot \vec{v}}$ es el tensor que contiene todos los efectos que puede causar el campo de velocidades, está compuesto por dos tensores uno simétrico $\overline{\underline{\underline{S}}}$ y otro antisimétrico $\overline{\underline{\underline{\Omega}}}$ al último lo descartamos porque tiene componentes de $\overline{\underline{\underline{v}}} \times \overline{\underline{\underline{v}}}$ que fuera demostrado rota como un rígido y nos quedamos trabajando únicamente con el tensor simétrico $\overline{\underline{\underline{S}}}$ que podía descomponerse en un tensor isotrópico $\overline{\underline{\underline{S}}}_1$ y otro deviatorio $\overline{\underline{\underline{S}}}_2$.

Una forma es la variación angular de la partícula sobre su mismo eje, tensiones normales, tensor isotrópico $\overline{\underline{\underline{S}}}_1$. Y el otro provoca variación de la velocidad sobre un eje normal es decir existe movimiento relativo entre partículas deviatorio $\overline{\underline{\underline{S}}}_2$.

La ecuación de Navier-Stokes a la que llegamos fue la siguiente:

$$\rho \left(\frac{\partial \overline{\underline{\underline{v}}}}{\partial t} + \overline{\underline{\underline{v}}} \cdot \overline{\underline{\underline{\nabla \cdot \vec{v}}}} \right) = -\overline{\underline{\underline{\nabla}}}_p + \rho \overline{\underline{\underline{g}}} + \mu \overline{\underline{\underline{\nabla}}}_2 \cdot \overline{\underline{\underline{v}}}$$

Válida para un fluido real, Newtoniano e incompresible.

Si aplicamos las hipótesis simplificativa obtenemos la ecuación fundamental de la hidrostática.

$$p = P_{atm} - \rho gh$$

Apuntes de Cátedra: Mecánica de los Fluidos e Hidráulica

Carrera: Ingeniería Industrial

Como la ecuación de Navier-Stokes es compleja para un fluido real, nuestro objetivo siempre ha sido encontrar el campo de velocidad o el campo de presiones, tenemos que integrar la ecuación diferencial. En adelante vamos a trabajar con un fluido ideal, es decir el término $\mu \nabla^2 \cdot \bar{v}$ sería nulo ya que es un fluido no viscoso. La ecuación queda de la siguiente forma:

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = -\nabla p + \rho \bar{g}$$

Si el escurrimiento es unidimensional $\nabla \cdot \bar{v} = 0$ pero recuerde en el análisis de la compuerta que tiene que existir una variación de la velocidad en el sentido perpendicular al escurrimiento.

El producto $\nabla \times \bar{v} \neq 0$ para un flujo unidimensional, es decir que un flujo sea rotacional o irrotacional son propiedades matemáticas del flujo, pero no propiedades del fluido.

Si hablamos de un fluido ideal puede haber movimiento relativo entre partículas, es mas puede estar rotando, en la parte inferior puede tener una velocidad mayor o menor a la parte superior lo que la hace rotar como un rígido. Lo que van a ser nulas son las tensiones tangenciales que dependen de las características del flujo.

Ecuación de Euler

Al ser un fluido ideal desaparecen las tensiones tangenciales debidas a la viscosidad μ . Abandonamos la hipótesis de fluido Newtoniano. También podemos decir que es la ecuación de la segunda ley de Newton para un fluido ideal.

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = -\nabla p + \rho \bar{g}$$

Analizamos el siguiente término:

$$\rho \bar{g} = -\rho g z = -\rho g (\nabla z)$$

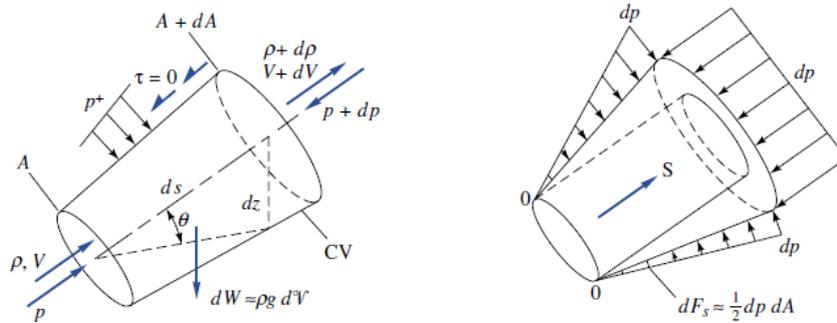
Así $\rho \bar{g}$ es un vector de las fuerzas gravitatorias que puede tener componentes en los tres ejes. Si reducimos nuestro universo a la Tierra tenemos únicamente componente de la misma sobre el eje z y por lo tanto $-\rho g z$. Negativo porque es contrario a la convención positiva del eje z tomada. También podemos escribirlo como $-\rho g (\nabla z)$, porque ∇z nábla aplicada a z , el único que sobrevive es k , es decir las derivadas parciales respecto del eje x y del eje y son nulas.

$$\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j + \frac{\partial z}{\partial z} k = 0 + 0 + k$$

¿Para qué estamos cambiando la notación si estamos escribiendo los mismo? podría preguntarse el alumno, al aparecer ∇ podremos aplicar conceptos de Euler, estamos tratando de transformar a la fuerza gravitatoria en algo que puede variar en el espacio, como por ejemplo un descenso repentino de la partícula que produce una variación de energía.

Trabajo y Energía. Campo Lagrangiano

Comenzaremos nuevamente con una deducción Lagrangiana, y veremos hasta donde podemos llegar sin pasar a Euler, buscaremos cuales son las complicaciones y facilidades que se presentan con este tipo de análisis.



Consideremos un campo de velocidades $v : v(x, y, z) \approx v(s, t)$ y colocamos una partícula en el interior de mismo, la partícula sigue la trayectoria y establecemos un nuevo sistema de referencia en donde el eje s es tangente a la trayectoria y el eje η perpendicular a s . Por el momento vamos a seguir una descripción lagrangiana. El vector velocidad está contenido en el eje s , porque se la define como la derivada del espacio respecto al tiempo.

Podemos reconocer, a priori, alguna de las ventajas respecto al sistema x, y, z en principio la aceleración convectiva tiene 9 componentes, y para el nuevo sistema $v \cdot \nabla v = \frac{\partial v}{\partial s}$ es decir hay variación respecto a una sola componente, una ventaja.

La segunda ley de Newton respecto a $s - s$:

$$\begin{aligned} \left(p - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) d\eta dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} \right) d\eta dx - \rho g \sin \beta ds d\eta dx &= \rho a_s ds d\eta dx \\ - 2 \frac{\partial p}{\partial s} \frac{ds}{2} d\eta dx - \rho g \sin \beta ds d\eta dx &= \rho a_s ds d\eta dx \\ - \frac{\partial p}{\partial s} ds d\eta dx - \rho g \sin \beta ds d\eta dx &= \rho a_s ds d\eta dx \\ - \frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \sin \beta &= \rho a_s \end{aligned}$$

El ángulo β es el formado por el eje s con la trayectoria de la partícula. El término $\rho g \sin \beta$ es la componente en el sentido del eje η . La aceleración a_s aparece por ser una trayectoria curva.

Las fuerzas superficiales que estamos considerando son debidas a las presiones, para simplificar, las presiones forman parte de las tensiones superficiales pero al no haber viscosidad, no hay movimiento relativo entre partículas y las tensiones tangenciales son nulas. Sólo tenemos componente de fuerzas normales. Las fuerzas superficiales se dibujan hacia el cubo de fluido.

El $\text{sen}\beta = \frac{\Delta z}{\Delta s}$ en mecánica de fluidos trabajamos con las unidades primarias por eso intentamos eliminar los ángulos, estamos buscando que estas unidades se anulen automáticamente en función de la línea de corriente. Buscamos una relación que esté vinculada con las características matemáticas del flujo de corrientes.

$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \frac{\partial z}{\partial s} = \rho a_s$$

Dividiendo ambos miembros por ρ :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{1}{\rho} g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{\rho} \rho a_s$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = a_s$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial v_s}{\partial s} v_s$$

Abandonaremos v_s y lo indicaremos como v ya que existe una sola componente de velocidad:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} v$$

Si el proceso es estacionario:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial s} v$$

Si el escurrimiento es horizontal $\beta = 0 \rightarrow \text{sen}\beta = 0 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial s} = 0$ En la práctica rara vez este término el nulo el ángulo prácticamente nunca es cero, pero necesitamos una expresión que nos permita abstraernos del diagrama. Pasamos del ángulo β a la derivada parcial para poder hacer una generalización.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial s} v$$

Si la solución del problema está sobre el eje s , z no puede tener proyección sobre el eje s .

Lo interesante de la última expresión es que la ecuación diferencial queda en función de variables de campo. Para nuestro caso s es perpendicular al eje x .

Es evidente que de un lado de la igualdad hay variaciones de la velocidad y del otro de la presión, eso nos indican las derivadas parciales, y ambos varían respecto de la misma trayectoria s . Además tienen signos contrarios, por lo que concluimos que si a lo largo de la trayectoria existe una variación negativa de la presión como ser una reducción o

disminución de la misma esto trae aparejado un aumento de velocidad. Encontramos una característica importante del escurrimiento.

La segunda ley de Newton respecto a $\eta - \eta$:

La aceleración centrípeta a_η está dirigida hacia el centro del radio de curvatura, recordar el tercer caso de la Ley de Newton sin movimiento relativo entre partículas. En el libro de mecánica de fluidos de Merle C. Potter se adopta la convención contraria. Si la trayectoria de la partícula es lineal el radio de curvatura es infinito por lo tanto la aceleración a_η es nula.

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{d\eta}{2} \right) ds dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{d\eta}{2} \right) ds dx - \rho g \cos \beta ds d\eta dx = -\rho a_\eta ds d\eta dx$$

$$-2 \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{d\eta}{2} ds dx - \rho g \cos \beta ds d\eta dx = -\rho a_\eta ds d\eta dx$$

$$-\frac{\partial p}{\partial \eta} d\eta ds dx - \rho g \cos \beta ds d\eta dx = -\rho a_\eta ds d\eta dx$$

$$-\frac{\partial p}{\partial \eta} - \rho g \cos \beta = -\rho a_\eta$$

Dividiendo ambos miembros por ρ :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} - \frac{1}{\rho} g \cos \beta = -\frac{1}{\rho} \rho a_\eta$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} - g \cos \beta = -a_\eta$$

Con la misma hipótesis anterior para $\beta = 0 \rightarrow \cos \beta = 1 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$ En este caso que no tenemos proyección z sobre η la partícula gira sobre el mismo plano horizontal.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} = -a_\eta$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{v^2}{R}$$

La última expresión nos muestra que si la presión varía en el eje η perpendicular a la trayectoria s de la partícula, lo hace en forma cuadrática de la velocidad y para pequeños radios de curvatura la variación de presión se incrementa. Si la trayectoria es únicamente rectilínea no habrá variación de presión sobre el eje perpendicular η . En una trayectoria curva aparece un gradiente de presión dirigido hacia afuera que al entrar en contacto con una superficie se manifiesta una fuerza superficial. Por lo tanto los puntos de estudio importante serán los codos o curvas en donde existe una variación de la trayectoria de la partícula, aparecerá a_η y si no tiene los anclajes correspondientes las fuerzas pueden romper la tubería.

Estas dos importantes conclusiones se pudieron alcanzar debido a la utilización de la descripción Lagrangiana, si nos hubiéramos quedado con la Euleriana, tendríamos las nueve componentes de la aceleración convectiva y no podría haber sido posible.

¿Cuál es el inconveniente que tenemos ahora?, las conclusiones quedaron en términos de derivadas parciales, es decir para una trayectoria de una partícula, no podemos generalizar. Tendremos tantas trayectorias como partículas tenga el campo de velocidades. Puede resolverse a partir de análisis numéricos por métodos computacionales. Obtuvimos dos conclusiones pero no la solución. Veremos si es posible obtener otras conclusiones.

La ecuación de Euler para un flujo estacionario $\left(\frac{\partial v}{\partial t} = 0\right)$ a lo largo de una línea de corriente es:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial s} v$$

Multiplicando ambos términos por ds :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} ds - g \frac{\partial z}{\partial s} ds = \frac{\partial v}{\partial s} v ds$$

El producto de fuerza escalar distancia es trabajo, un escalar. Es decir es un tensor de cero grado. En este caso el producto no puede ser escalar porque ya se está trabajando sobre la trayectoria de ds .

Pasando todo a un mismo lado de la igualdad:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} ds - g \frac{\partial z}{\partial s} ds - \frac{\partial v}{\partial s} v ds = 0$$

Multiplicando por (-1) :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} ds + g \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{\partial v}{\partial s} v ds = 0$$

Si la ecuación anterior se integra el resultado es una constante tanto para un fluido real o ideal como este caso. Si p dependiera únicamente de s , si z dependiera únicamente de s como una caída vertical, y si v dependiera únicamente de s . Podemos expresarlo en términos de diferenciales totales.

$$\frac{1}{\rho} dp + g dz + v dv = 0$$

Si integramos:

$$\frac{1}{\rho} \int dp + g \int dz + \int v dv = cte$$

$$\frac{1}{\rho} p + gz + \frac{v^2}{2} = cte$$

La ecuación de anterior es la ecuación de Bernoulli en unidades de energía.

Apuntes de Cátedra: Mecánica de los Fluidos e Hidráulica

Carrera: Ingeniería Industrial

A partir de las conclusiones obtenidas del campo Lagrangiano con ejes η y s , multiplicamos la ecuación por la trayectoria ds y obtuvimos una ecuación de trabajo. Al integrar dicha trabajo hallamos la ecuación de energía de Bernoulli.

Si dividimos la ecuación anterior por g :

$$\frac{1}{\rho g} p + \frac{g}{g} z + \frac{v^2}{2g} = cte$$

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} = cte$$

Obtenemos la ecuación de Bernoulli en unidades de altura.

La expresión anterior corresponde a la ecuación de energía de un fluido que se desplaza. En termodinámica se definen todas las formas de energía que pueden manifestarse en ingeniería. En Mecánica de Fluidos, a partir del primer día de clases, exigimos que las únicas fuerzas admitidas para producir el movimiento de un fluido sean las fuerzas superficiales y las másicas, que producen una aceleración en la partícula, si estas fuerzas se aplican a lo largo de una trayectoria aparece un trabajo de las fuerzas superficiales $\frac{1}{\rho} p$, de las fuerzas másicas gz y la aceleración de la partícula $\frac{v^2}{2}$. La ecuación tiene consistencia.

Si fuerza el caso de la presencia de un gradiente de temperatura se producirá un trabajo debido a las fuerzas calorías, las temperaturas al menos aquí, permanecen constantes, de lo contrario el principio de Bernoulli se generaliza al primer principio de la termodinámica. Principio de conservación de la energía.

En termodinámica se define. En Mecánica de Fluidos se demuestra. Al menos en un curso de grado.

Primero definimos los tipos de fuerzas admitidos, después desdoblamos las fuerzas con análisis tensoriales, luego las integramos a lo largo de una trayectoria. Faltaría el trabajo desarrollado por las tensiones tangenciales, nulas en nuestro caso, al ser un fluido ideal.

Una pregunta que puede surgir es si existe componente de fuerza en el eje η en nuestro caso no, porque la trayectoria está contenida en s . Recuerde también que estamos hablando de diferenciales, ninguna fuerza puede realizar trabajo en el eje η porque ds está contenido en s es decir es tangente a la trayectoria. Además no existe proyección sobre s están a 90 grados.

Trabajo y Energía. Campo Euleriano

Si existe un concepto difícil de entender en ingeniería es el de energía, el de fuerza u otras magnitudes fácilmente pueden ser interpretadas, pero la energía es un poco más compleja, por lo tanto volveremos al sistema coordenado cartesiano x, y, z .

Dado un vector posición $R : R(x, y, z)$ en un punto p que pasa a $R : R(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ podemos definir su diferencial como:

$$dR = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

La ecuación de Navier-Stokes para un fluido ideal queda:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$$
$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g}$$

Dividiendo por ρ ambos miembros:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}$$

Escribiremos la aceleración de la gravedad \mathbf{g} de la siguiente forma, exigimos que \mathbf{g} tenga componentes únicamente sobre el eje z es decir solo sobrevive \mathbf{k}

$$\mathbf{g} = -g \nabla z$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z$$

La expresión anterior es la Ecuación de Euler para coordenadas x, y, z .

La expresión anterior son fuerzas, es de carácter vectorial por lo tanto fuerzas escalar distancia, obtenemos trabajo. A diferencia de la descripción Lagrangiana que el producto era con una sola componente ds ; ahora tenemos un producto escalar con $d\mathbf{R}$.

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{R} = \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z \right) \cdot d\mathbf{R}$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot d\mathbf{R} = \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{R} - g \nabla z \cdot d\mathbf{R}$$

Al ser un producto escalar solo sobreviven las componentes con un los mismos subíndices:

$$-\frac{1}{\rho} \bar{\nabla}_p \cdot d\bar{R} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k \right) \cdot (dx i + dy j + dz k) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = -\frac{1}{\rho} dp$$

$$-g \bar{\nabla}_z \cdot d\bar{R} = -g \left(\frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j + \frac{\partial z}{\partial z} k \right) \cdot (dx i + dy j + dz k) = -g \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy + \frac{\partial z}{\partial z} dz \right) = -g dz$$

Supongamos que el proceso se estacionario $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0$ pasando todo a un mismo lado:

$$-\frac{1}{\rho} dp - g dz - \bar{v} \cdot \bar{\nabla} \bar{v} \cdot d\bar{R} = 0$$

El termino $\bar{v} \cdot \bar{\nabla} \bar{v} \cdot d\bar{R}$ contiene los nueve términos de la aceleración convectiva, en principio al multiplicarse por la trayectoria sería muy complejo. En la descripción lagrangiana esto no sucedía porque únicamente dependía de s . Lo que vamos a hacer es utilizar una identidad vectorial.

$$\bar{v} \cdot \bar{\nabla} \bar{v} = \frac{1}{2} \bar{\nabla} (\bar{v} \cdot \bar{v}) - \bar{v} \times (\bar{\nabla} \times \bar{v}) = \frac{1}{2} \bar{\nabla} v^2 - \bar{v} \times (\bar{\nabla} \times \bar{v})$$

$$\bar{v} \cdot \bar{\nabla} \bar{v} = \frac{1}{2} \bar{\nabla} v^2 - \bar{v} \times (\bar{\nabla} \times \bar{v})$$

El termino $\bar{\nabla} v^2$ se lee nabla aplicado a v^2 .

$$\frac{1}{2} \bar{\nabla} v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^2}{\partial x} i + \frac{\partial v^2}{\partial y} j + \frac{\partial v^2}{\partial z} k \right) = \frac{1}{2} dv^2$$

Además v^2 podemos expresarlo como:

$$v^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

Si ahora calculamos $\bar{\nabla} \times \bar{v}$ obtenemos:

$$\bar{\nabla} \times \bar{v} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) k$$

$$\bar{v} \times (\bar{\nabla} \times \bar{v}) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{pmatrix} =$$

$$\bar{v} \times (\bar{\nabla} \times \bar{v}) = \left(v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) i + \left(w \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) j + \left(u \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) k$$

Tomando el término ya visto y expresándolo en el eje $x - x$:

$$\frac{1}{2} \bar{\nabla} v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} i + \frac{\partial v^2}{\partial x} j + \frac{\partial w^2}{\partial x} k \right)$$

Derivando los términos:

$$\frac{1}{2} \bar{\nabla} v^2 = \frac{1}{2} \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} i + 2v \frac{\partial v}{\partial x} j + 2w \frac{\partial w}{\partial x} k \right)$$

$$\frac{1}{2} \bar{\nabla} v^2 = \frac{\partial u}{\partial x} u i + \frac{\partial v}{\partial x} v j + \frac{\partial w}{\partial x} w k$$

$$\frac{1}{2} \bar{\nabla} v^2 = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial w}{\partial x} w$$

$$\bar{v} \times (\bar{\nabla} \times \bar{v}) = \left(v \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) i$$

$$\bar{v} \times (\bar{\nabla} \times \bar{v}) = v \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial x}$$

Finalmente:

$$\frac{1}{2} \bar{\nabla} v^2 - \bar{v} \times (\bar{\nabla} \times \bar{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial w}{\partial x} w - \left(v \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\frac{1}{2} \bar{\nabla} v^2 - \bar{v} \times (\bar{\nabla} \times \bar{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial x} v + \frac{\partial w}{\partial x} w - v \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - w \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2} \bar{\nabla} v^2 - \bar{v} \times (\bar{\nabla} \times \bar{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w$$

Para cada uno de los ejes tendríamos

$$\bar{v} \cdot \bar{\nabla} \bar{v} = \frac{1}{2} \bar{\nabla} v^2 - v \times (\bar{\nabla} \times v) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right)$$

Consideremos que el producto vectorial entre dos vectores es un vector, utilizaremos la siguiente regla definida por tres columnas (1 2 3) La primer columna es la componente del primer termino del producto vectorial, la segunda columna corresponde a la componente del segundo término del producto vectorial, la tercer columna corresponde a la dirección del vector resultante.

La deducción anterior es compleja, extensa, matemáticamente hablando pero es el lenguaje de la mecánica de fluidos.

Volviendo a la ecuación original,

$$\frac{1}{\rho} dp + g dz + \bar{v} \cdot \bar{\nabla} \bar{v} \cdot d\bar{R} = 0$$

$$\bar{v} \cdot \bar{\nabla} \bar{v} = \frac{1}{2} \bar{\nabla} v^2 - v \times (\bar{\nabla} \times v)$$

Si el fluido fuera irrotacional $\bar{\nabla} \times v = 0$

$$\frac{1}{\rho} dp + g dz + \frac{1}{2} \bar{\nabla} v^2 \cdot d\bar{R} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} dp + g dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^2}{\partial x} i + \frac{\partial v^2}{\partial y} j + \frac{\partial v^2}{\partial z} k \right) \cdot (dxi + dyj + dzk) = 0$$

$$\frac{1}{\rho} dp + g dz + \frac{1}{2} dv^2 = 0$$

Integrando los términos:

$$\frac{1}{\rho} \int dp + g \int dz + \frac{1}{2} \int dv^2 = cte$$

$$\frac{1}{\rho} p + gz + \frac{v^2}{2} = cte$$

Ahora obtuvimos la misma ecuación de Bernoulli para un campo irrotacional no para una línea de corriente.

Para un flujo irrotacional $\bar{\nabla} \times v = 0$ el diferencial de desplazamiento $d\bar{R}$ no necesariamente tiene que pertenecer a la trayectoria, puede ser arbitrario en cualquier dirección.

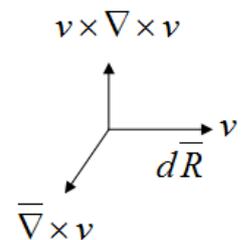
Por lo tanto la ecuación de Bernoulli se puede aplicar entre dos puntos cualesquiera del campo de flujo.

Al desaparecer el término $\bar{\nabla} \times v = 0$ podemos calcular la energía o el trabajo necesario para llevar una partícula de un punto a otro dentro del campo de velocidades sin la imposición de que el punto de análisis pertenezca a la trayectoria.

Supongamos ahora que el escurrimiento es rotacional $\bar{\nabla} \times v \neq 0$ aparecerán los nueve términos de la aceleración convectiva. Para poder seguir manteniendo la igualdad, los que vamos a hacer es nuevamente hacer coincidir al vector desplazamiento $d\bar{R}$ con la trayectoria de la partícula.

Cuando el flujo es rotacional $\bar{\nabla} \times v$ es un vector, ya no es más uniforme, ahora tenemos variación de la velocidad sobre el eje normal a la trayectoria.

Es decir el vector $d\bar{R}$ es perpendicular a $\bar{\nabla} \times v$ y si además la velocidad v tiene la misma dirección de $d\bar{R}$, al hacer el producto vectorial $v \times \bar{\nabla} \times v$ nos dará un vector perpendicular al plano definido por v y $\bar{\nabla} \times v$. El vector $\bar{\nabla} \times v$ es un vector perpendicular al eje donde está definida la velocidad v .



$$\beta = 90$$

Por definición de trabajo:

$$\|v \times (\bar{\nabla} \times v)\| \cdot \|d\bar{R}\| \cos \beta = 0$$

Para un escurrimiento rotacional el $d\bar{R}$ pertenece a la trayectoria. Por lo tanto lo que permanece constante en Bernoulli es la energía a lo largo de la trayectoria.

Cuando el escurrimiento es rotacional $d\bar{R}$ debe pertenecer a la trayectoria porque existe otra forma de anular $v \times \bar{\nabla} \times v$.

Llegamos a la misma ecuación de Bernoulli a partir de la ecuación de Euler, primero utilizando una descripción Lagrangiana siguiendo la trayectoria de una partícula $v_{(\eta,s)}$ y posteriormente para una descripción Euleriana con $v_{(x,y,z)}$ en el último caso con la ayuda de una identidad vectorial. Se utilizaron distintos caminos, diferentes expresiones y se llegó a lo mismo. Esto se debe a que la energía es un escalar, un número, solo tiene un plano de comparación, no tiene sistema de referencia, indistintamente el sistema de coordenadas que se utilice, el resultado será el mismo. La energía se compara respecto a una unidad patrón, una unidad de medida. Para poder medir la energía es necesario un elemento de comparación. Las formas de energía son variables, Eólica, solar, eléctrica, térmica etcétera.

La clase siguiente veremos la Ecuación de Navier-Stokes para un flujo laminar, nos encontraremos con algunas complicaciones y finalmente pasaremos a un fluido turbulento. Una vez que entendamos cómo se comportan los flujos turbulentos pasaremos a ecuaciones de energía en fluidos reales.

Una vez concluidos los tópicos mencionados, daremos por cerrada la parte de Mecánica de Fluidos, y pasaremos a Máquinas Hidráulicas.

Repaso. Ecuación de Euler y formas de Energía Bernoulli

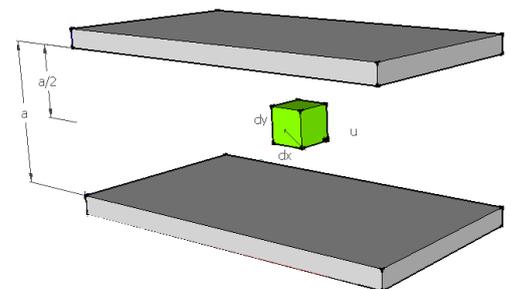
Hasta el momento una vez encontrada la ecuación de Navier-Stokes general, pasamos a un fluido ideal y obtuvimos la ecuación de Euler. Llegamos a obtener dos conclusiones muy importantes, una de ellas era que a una disminución de la presión en el sentido del escurrimiento le corresponde un aumento de velocidad y la otra que si existe variación de velocidad en un eje normal a la trayectoria aparece un gradiente de presión que al tomar contacto con una superficie generan fuerzas superficiales que pueden romper las tuberías. La expresión quedaba en forma diferencial y no pudimos integrarla, no sabíamos cual era el valor de la presión y la velocidad para cada punto, a fin de obtener la solución. Además eso solo ocurría para una trayectoria para otra no podríamos afirmarlo. Lo que vamos a hacer ahora es tratar de obtener la solución de las ecuaciones tomando un sistema x, y, z . Para ello existe una hipótesis de flujo laminar completamente desarrollado.

Flujo laminar completamente desarrollado.

Los flujos no viscosos no satisfacen la condición de no deslizamiento; se deslizan a lo largo de la pared sin pasar a través de ella. Para retener las condiciones viscosas de no deslizamiento tenemos que considerar las ecuaciones de Navier-Stokes completas, y el resultado no suele ser irrotacional ni admitir potencial de velocidades. Estudiaremos aquí tres casos: (1) el flujo entre dos placas paralelas debido al movimiento de la pared superior, (2) el flujo entre dos placas planas debido a un gradiente de presiones y (3) el flujo entre dos cilindros concéntricos debido a la rotación del cilindro interior. Todos los flujos de son viscosos y rotacionales.

Para un flujo laminar la longitud de las placas es 100 veces el diámetro y para un flujo turbulento entre 30 y 40 veces el diámetro.

Supondremos que tenemos un escurrimiento de un fluido y la figura anterior representa el conducto.



No conocemos cual es el perfil de velocidades, en principio las partículas van a seguir a su cantidad de movimiento. A medida que se encause el perfil de velocidades disminuye, las partículas adquieren la velocidad del solido con el que están en contacto. Existe una propagación de la cantidad de movimiento en el sentido perpendicular a la trayectoria. La viscosidad del fluido, a través de las tensiones tangenciales transporta la cantidad de movimiento en el sentido perpendicular a la trayectoria. La trayectoria es un escurrimiento unidimensional tiene propagación en el eje x .

En principio se desconoce el perfil de velocidades, después de una determinada longitud el perfil de velocidades media no varía mas. Al cabo de esta longitud las partículas terminan de organizarse. Como vimos en un régimen turbulento esta longitud es menos a la del régimen laminar.

El número de Reynolds permite calcular el tipo de régimen siendo este el cociente entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas:

$$R_e = \frac{F_i}{F_v}$$

$$F_i = m\bar{a} = \rho l^3 \frac{v}{t} = \rho l^3 \frac{l}{t} = \rho l^3 \frac{l}{t^2} = \rho l^4 \frac{1}{t^2}$$

$$F_v = \tau \bar{A} = \bar{A} \mu \frac{du}{dy} = \bar{A} \mu \frac{l}{l} = l^2 \mu \frac{l}{l} = l^2 \mu \frac{1}{t}$$

$$R_e = \frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho l^4 \frac{1}{t^2}}{l^2 \mu \frac{1}{t}} = \frac{\rho l^4}{l^2 \mu t} = \frac{\rho l^2}{\mu t} = \frac{\rho l}{\mu} v$$

$$R_e = \frac{\rho l}{\mu} v$$

El término l corresponde a una longitud característica:

$$R_e = \frac{\rho d v}{\mu}$$

Si el número de Reynolds R_e es muy pequeño predominan las fuerzas viscosas F_v . Si es muy grande predominan las fuerzas inerciales F_i sobre las viscosas

Características del flujo laminar:

$$L_L = 100d$$

$$R_e < 1100$$

$$R_e < 2300 \rightarrow \text{Tuberías}$$

Características del flujo turbulento:

$$L_T = 30d \cup 40d$$

$$R_e > 1100$$

La determinación experimental del número de Reynolds puede consultarse en cualquier libro de Mecánica de Fluidos.

Un escurrimiento laminar requiere de mayor longitud hasta alcanzar el perfil de velocidades estable debido a que hay un movimiento ordenado de partículas, en el flujo turbulento las partículas se mueven erráticamente y cruzan sus trayectorias alcanzando más rápido el perfil estable.

Apuntes de Cátedra: Mecánica de los Fluidos e Hidráulica

Carrera: Ingeniería Industrial

La propagación de la cantidad de movimiento en el escurrimiento laminar es únicamente por los efectos viscosos.

El escurrimiento turbulento presenta una viscosidad cien veces mayor a la viscosidad en régimen laminar, por lo que las mezclas son más rápidas.

$$\mu_T = 100\mu_L$$

A partir de la longitud característica l el perfil de velocidades no cambia a menos que exista una perturbación, por ejemplo, una reducción en la sección de la tubería.

Cuando apliquemos la ecuación de Navier-Stokes será en la correspondiente a la longitud característica l , donde el flujo está totalmente desarrollado, nunca en la zona de transición que presenta flujo inestable.

Ahora veremos algunos tipos de perfiles de velocidades medias, porque más adelante nos será útil para entender el fenómeno de lubricación.

1° Caso. Placas paralelas infinitas fijas.

Las hipótesis que tendremos en cuenta son fluido incompresible ρ , flujo estacionario $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ escurrimiento laminar, totalmente desarrollado. Por último escurrimiento unidireccional trabajaremos sobre el eje $x - x$. No hay componente de velocidad en $y - y$ tampoco así en $z - z$

Nuestro plano de trabajo será el $x - y$. Las placas están separadas una distancia a y la partícula atraviesa el conducto justo por $\frac{a}{2}$.

Tenemos que:

$$y = 0 \rightarrow u = 0$$

$$y = a \rightarrow u = 0$$

El flujo se establece, existe, plantearemos el principio de conservación de la masa y el principio de conservación de la cantidad de movimiento.

La velocidad depende exclusivamente de y , no depende de x porque está completamente desarrollado y tiene, independientemente de la longitud tomada, el mismo valor.

$$v : v_{(x,y,z)} = u_x i + v_y j + w_z k$$

$$v : v_{(y)} = u_x i$$

Recordando la propiedad extensiva de la cantidad de movimiento para un análisis integral:

$$\frac{DP}{Dt} = F_{\text{sup}} + F_{\text{mas}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho v dV + \int_{\text{Sup}C} \rho v v \cdot dA$$

Proceso estacionario:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho v dV = 0$$

Por ser incompresible:

$$\int_{\text{Sup}C} \rho v v \cdot dA = 0$$

Para que $v \cdot dA$ sea distinto de cero el vector debería estar contenido sobre el eje x , pero al no tener componente de velocidad en los ejes restantes, y al ser un fluido incompresible la cantidad de masa que ingresa es la misma que la que egresa. El vector v y dA tienen la misma dirección por lo tanto se anulan. Si sale lo mismo que entra es incompresible.

Como conclusión para el tipo de escurrimiento que estamos analizando las fuerzas superficiales y másicas son nulas. Las fuerzas másicas están contenidas sobre el eje z.

La serie de Taylor aplicada al escurrimiento unidimensional es:

$$dF_x = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz$$

$$dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz$$

$$dF_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dx dy dz$$

$$dF_x = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dx dy dz$$

$$dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0$$

$$dF_x = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$$

Recordemos que por más que estemos hablando de un fluido ideal, existe movimiento relativo entre partículas.

La razón por la que no utilizamos la tensión normal y en su lugar utilizamos la presión es que:

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ Fluido incompresible. Principio de conservación de la masa.

$2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$ No hay variación de velocidad en el eje de las x. Fluido completamente desarrollado.

Por lo tanto:

$$\sigma_{xx} = -p$$

Retomando:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$$

La ecuación anterior nos está diciendo como varía p respecto de su recorrido $\frac{\partial p}{\partial x}$. En principio la solución de la ecuación anterior nos dice que p es una función de x y τ es una función de y .

$$p : p_{(x)} = 2x$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2$$

$$\tau : \tau_{(y)} = 2y$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 2$$

Por lo tanto para que sea válida para ambas:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = cte$$

Al hacer las derivadas parciales iguales a una constante estamos generalizando para cualquier punto del espacio.

Entonces:

$$d\tau_{yx} = \frac{\partial p}{\partial x} dy = cte dy$$

$$\int d\tau_{yx} = \frac{\partial p}{\partial x} \int dy$$

$$\tau_{yx} = \frac{\partial p}{\partial x} y + c_1$$

La ecuación anterior nos dice que la tensión de corte varía linealmente con el eje y .

Recordando que

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}$$

Igualando:

$$\mu \frac{du}{dy} = \frac{\partial p}{\partial x} y + c_1$$

Despejando du :

$$du = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y dy + \frac{1}{\mu} c_1 dy$$

Integrando:

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + \frac{1}{\mu} c_1 y + c_2$$

$$y = 0 \rightarrow u = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y = a \rightarrow u = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{a^2}{2} + \frac{1}{\mu} c_1 a \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{a^2}{2} \frac{\mu}{a} \Rightarrow c_1 = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{a}{2}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + \frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{a}{2} \right) y$$

Si multiplicamos y dividimos por a^2 :

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} \frac{a^2}{a^2} + \frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{a}{2} \right) y \frac{a^2}{a^2}$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} a^2 \left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{y}{a} \right)$$

La expresión anterior corresponde al perfil de velocidades medias. Verifiquemos las condiciones de borde

$$y = 0 \rightarrow u = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} a^2 \left(\frac{0^2}{a^2} - \frac{0}{a} \right) = 0$$

$$y = a \rightarrow u = 0 \Rightarrow 0 = u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} a^2 \left(\frac{a^2}{a^2} - \frac{a}{a} \right) = 0$$

Si queremos saber donde el perfil de velocidades es máximo, aplicamos el Principio de Fermat obtenemos donde la función es máxima:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} a^2 \left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{y}{a} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} a^2 \left(\frac{1}{a^2} 2y - \frac{1}{a} \right) = 0$$

$$\frac{1}{a^2} 2y - \frac{1}{a} = 0$$

$$y = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$$

$$y = \frac{a}{2}$$

En el centro del tubo la velocidad es máxima.

Reemplazando en la ecuación original $y = \frac{a}{2}$:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} a^2 \left(\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{a} \right) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} a^2 \left(\frac{a^2}{4a^2} - \frac{a}{2a} \right) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{a^4}{4a^2} - \frac{a^3}{2a} \right) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \right)$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} a^2 \left(-\frac{1}{4} \right)$$

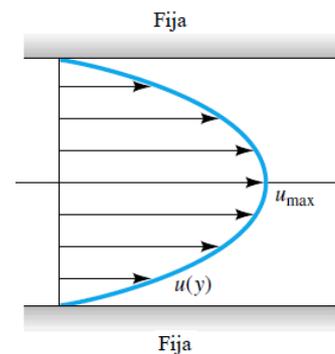
$$u = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{a^2}{8\mu}$$

Con la expresión anterior se obtiene el valor de la velocidad máxima.

Recordemos que el fluido se mueve porque existe un gradiente de presión $\frac{\partial p}{\partial x}$.

Si se le pidiera obtener el perfil de velocidades medias a partir de la ecuación de Navier-Stokes para un fluido totalmente desarrollado, estacionario, unidimensional e incompresible usted debe:

Plantear la ecuación de Navier Stokes:



$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = -\bar{\nabla} p + \rho \bar{g} + \mu \bar{\nabla}^2 \cdot \bar{v}$$

De carácter unidimensional:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) = 0 \text{ Flujo completamente desarrollado}$$

$\rho g_x = 0$ No existe proyección sobre el eje x.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ La velocidad solo tiene componente en j del eje y

$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ La velocidad solo tiene componente en j del eje y

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = +\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = +\mu \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}$$

Recordando que:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Finalmente:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d\tau_{yx}}{dy} = cte$$

La razón por la cual se llegó a la misma expresión de forma más simple fue debido a que en las hipótesis estaban contenidas todas las características del escurrimiento que fuimos eliminando a lo largo del desarrollo de esta clase.

2° Caso: Placas paralelas infinitas, con la superior moviéndose a velocidad constante.

Vamos a tomar las mismas hipótesis que en el caso anterior con la diferencia de que la placa superior adquiere una velocidad u .

Lo que cambia en este caso es una de las condiciones de borde:

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + \frac{1}{\mu} c_1 y + c_2$$

Aplicando condiciones de borde:

$$y = 0 \rightarrow u = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y = a \rightarrow u = u \Rightarrow u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{a^2}{2} + \frac{1}{\mu} c_1 a \Rightarrow c_1 = \left(-\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{a^2}{2} + u \right) \frac{\mu}{a} = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{a}{2} + u \frac{\mu}{a} \Rightarrow c_1 = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{a}{2} + u \frac{\mu}{a}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + \frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{a}{2} + u \frac{\mu}{a} \right) y$$

Si multiplicamos y dividimos por a^2 :

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} \frac{a^2}{a^2} + \frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{a}{2} + u \frac{\mu}{a} \right) y \frac{a^2}{a^2}$$

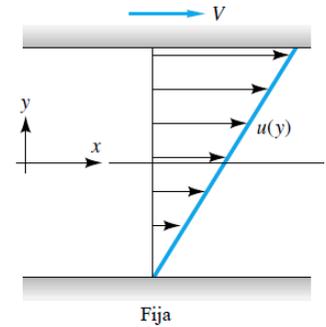
$$u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} \frac{a^2}{a^2} + -\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{a}{2} y \frac{a^2}{a^2} + u \frac{1}{\mu} \frac{\mu}{a} y \frac{a^2}{a^2}$$

$$u = \frac{a^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{y^2}{a^2} - a \frac{y}{a^2} \right) + \frac{u}{a} y$$

$$u = \frac{a^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\left(\frac{y}{a} \right)^2 - \frac{y}{a} \right) + \frac{u}{a} y$$

La expresión anterior es similar al caso anterior $\frac{a^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\left(\frac{y}{a} \right)^2 - \frac{y}{a} \right)$ representa el perfil de velocidad media cuando

el escurrimiento es debido a un gradiente de presión, representado gráficamente por una parábola.



En este caso el fluido se mueve porque la placa superior se mueve, no existe gradiente de presión. Si la placa superior se mueve a una velocidad u transmite la información a las capas o estratos del fluido inferiores, por medio de la viscosidad de forma natural, la viscosidad μ actúa como vínculo. Recordar el ejemplo del empuje sobre una columna de hojas, cada hoja se moverá sobre su línea. No hay transferencia de la cantidad de movimiento por las masas, únicamente por la viscosidad, por eso es lineal.

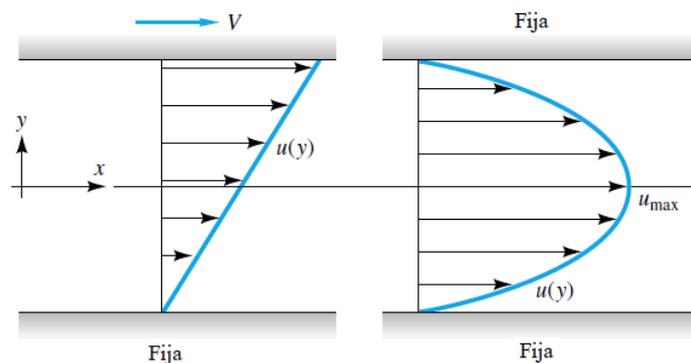
Este es el escurrimiento más simple de un fluido las fuerzas superficiales son constantes porque

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial x} = cte$$

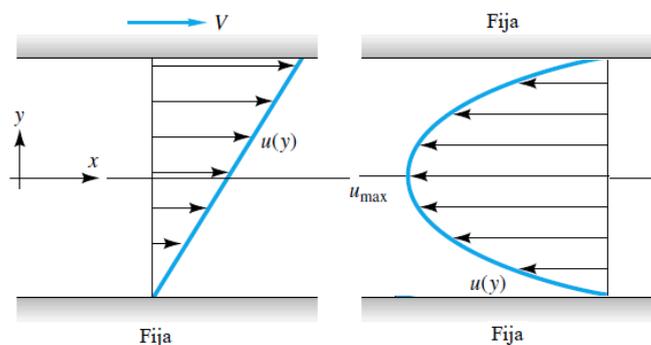
Si $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ la placa superior esta fija. EL perfil de velocidades es lineal $u = \frac{u}{a} y$

Si $u = 0$ Ambas placas están fijas y el perfil de velocidades es parabólico. $u = \frac{a^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\left(\frac{y}{a} \right)^2 - \frac{y}{a} \right)$

Si $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ Los perfiles de velocidades se suman. $u = \frac{a^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\left(\frac{y}{a} \right)^2 - \frac{y}{a} \right) + \frac{u}{a} y$



Si $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ Los perfiles de velocidades se suman. $u = -\frac{a^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\left(\frac{y}{a} \right)^2 - \frac{y}{a} \right) + \frac{u}{a} y$



En este último caso existe una distribución contraria de la masa, parte se va con la placa en movimiento y parte sigue el sentido del gradiente de presión.

Fenómeno de Lubricación

Estamos en condiciones de ver el fenómeno de lubricación, básicamente consiste en dos superficies sólidas en contacto y una de ellas deseamos moverla. Al estar en contacto dos superficies solidas que presentan cierto grado de contacto, se generan fricciones, ¿cómo podemos mover la placa superior sin que la inferior sufra desgaste?

Si colocamos un fluido entre las superficies solidas se produce alguno de los casos mencionados. Esto se logra inyectando fluido, permitiendo la separación de las placas en contacto, lográndose así la misma presión en ambos extremo, primera hipótesis de lubricación. Si las presiones en ambos extremos son diferentes el fluido escurre.

Si las fuerzas de viscosidad están en equilibrio, la fuerza debida a la presión del fluido sobre las caras terminales de un elemento de fluido, deben ser iguales, es así que la presión es constante en toda la sección.

$$p = cte \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} > 0 \rightarrow \frac{d\tau_{yx}}{\partial y} = 0$$

Obtenemos un perfil de velocidades lineal. El fluido está confinado, no hay gradiente de presión, el fluido se mueve porque la placa superior se mueve.

Existe una presión causada por el peso de la superficie superior debajo de este existirá una presión p_1 más un Δ_p debido al peso de la placa.

$$p_1 + \Delta_p$$

$$\Delta_p = \frac{Peso}{Area}$$

Al ser esta mayor que las presiones de los extremos tiende a escapar. Es por eso que se utiliza el efecto cuña. Si el perfil de velocidades es lineal el gradiente de presión es nulo.

Supongamos ahora el caso de dos superficies planas convergentes, la superior es fija y la inferior se desplaza a una velocidad c . Como el caudal debe permanecer constante en todas las secciones y se genera una reducción en la altura en el sentido del escurrimiento, entonces, admitimos que en un lugar de la longitud de la cuña se tiene un perfil de velocidades lineal.

En el ingreso la partícula cuenta con una presión p_1 entre la superficie plana y la cuña vale $p_1 + \Delta_p$ y al salir lo hace con p_1 nuevamente, lo que permite hacer este aumento de presión y soportar el peso de la superficie superior.

El conjunto $p_1 + \Delta_p$ multiplicado por el área de la cuña nos proporciona una fuerza dirigida hacia arriba que permite soportar el peso. Es un fenómeno estrictamente fluidodinámico, si no existe cuña eso no puede suceder.

En un cojinete para lograr el efecto de cuña el cilindro interior debe estar descentrado respecto al exterior.

Para comprender el fenómeno de lubricación es necesario el análisis diferencial, si fuera integral se analizan las propiedades de las superficies de contorno pero se desconoce lo que ocurre en el interior.

Apuntes de Cátedra: Mecánica de los Fluidos e Hidráulica

Carrera: Ingeniería Industrial

Ahora el problema que tenemos es encontrar la forma de la superficie para dar el efecto de cuña. Existen muchas variables, el tipo de soporte de la cuña origina un momento, para simplificar admitimos que existe un punto óptimo dentro de la cuña en el que el perfil de velocidades es lineal.

En cojinetes de gran envergadura como ser una turbina, se utilizan patines sucesivos para cada uno de ellos existe un perfil de velocidades.

Escorrimento Laminar para un tubo circular.

Nuevamente tendremos en cuenta las mismas hipótesis, escorrimento unidimensional, flujo laminar, el volumen de control será un anillo. Adoptaremos el sistema de ejes circunferencial de acuerdo al volumen de control seleccionado.

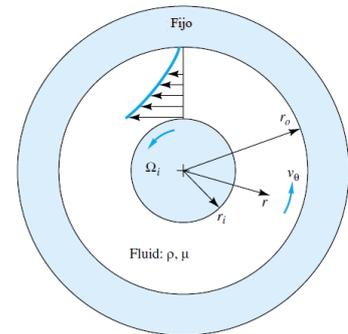
Las condiciones son para $r = r_0$ estamos en el borde, para $r = 0$ estamos en el centro.

No existe componente de velocidad en el sentido de las r el escorrimento es longitudinal.

Por lo tanto las tensiones tangenciales:

$$\tau_{rx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightarrow \tau_{rx} = \mu \frac{du}{dr}$$

$$F_{yx} + F_{ax} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho v dl + \int \rho v$$



Lo siguiente es sumar las fuerzas que actúan sobre el volumen de control en la dirección de x . Por serie de Taylor:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) 2\pi r dr - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) 2\pi r dr - \left(\tau_{rx} - \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} \frac{dr}{2} \right) 2\pi \left(r - \frac{dr}{2} \right) dx + \left(\tau_{rx} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} \frac{dr}{2} \right) 2\pi \left(r + \frac{dr}{2} \right) dx = 0$$

Como solo τ_{rx} depende de x se expresa en forma de diferencial total:

$$\begin{aligned} & -2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} 2\pi r dr - 2\pi \tau_{rx} dx r + 2\pi \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} \frac{dr}{2} dx r + 2\pi \tau_{rx} dx \frac{dr}{2} - 2\pi \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} \frac{dr}{2} dx \frac{dr}{2} \\ & + 2\pi \tau_{rx} dx r + 2\pi \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} \frac{dr}{2} dx r + 2\pi \tau_{rx} dx \frac{dr}{2} + 2\pi \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} \frac{dr}{2} dx \frac{dr}{2} = 0 \\ & -2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} 2\pi r dr + 2\pi \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} \frac{dr}{2} dx r + 2\pi \tau_{rx} dx \frac{dr}{2} + 2\pi \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} \frac{dr}{2} dx r + 2\pi \tau_{rx} dx \frac{dr}{2} = 0 \\ & -2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} 2\pi r dr + 2\pi \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} \frac{dr}{2} dx r + 2\pi \tau_{rx} dx \frac{dr}{2} + 2\pi \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} \frac{dr}{2} dx r + 2\pi \tau_{rx} dx \frac{dr}{2} = 0 \\ & -2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} 2\pi r dr + 4\pi \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} \frac{dr}{2} dx r + 4\pi \tau_{rx} dx \frac{dr}{2} = 0 \\ & -\frac{\partial p}{\partial x} dx 2\pi r dr + 2\pi \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} dr dx r + 2\pi \tau_{rx} dx dr = 0 \\ & -\frac{\partial p}{\partial x} dx \pi r dr + \pi \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} dr dx r + \pi \tau_{rx} dx dr = 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} r + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} r + \tau_{rx} = 0$$

Dividiendo ambos miembros por x y despejando $\frac{\partial p}{\partial x}$:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{1}{r} \tau_{rx}$$

Utilizaremos la siguiente identidad:

$$\frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{1}{r} \tau_{rx} = \frac{1}{r} d \left(r \frac{\tau_{rx}}{dr} \right)$$

$$\frac{1}{r} d \left(r \frac{\tau_{rx}}{dr} \right) = \frac{1}{r} d \left(\frac{dr}{dr} \tau_{rx} + r \frac{d\tau_{rx}}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{dr}{dr} \tau_{rx} + \frac{1}{r} r \frac{d\tau_{rx}}{dr} = \frac{1}{r} \tau_{rx} + \frac{d\tau_{rx}}{dr}$$

Podemos reescribir:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{r} d \left(r \frac{\tau_{rx}}{dr} \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} r = d \left(r \frac{\tau_{rx}}{dr} \right)$$

Integrando:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \int r = \int d \left(r \frac{\tau_{rx}}{dr} \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \frac{r^2}{2} = \tau_{rx} r + c_1$$

$$\tau_{rx} r = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{r^2}{2} + c_1$$

$$\tau_{rx} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{r}{2} + \frac{c_1}{r}$$

Como $\tau_{rx} = \mu \frac{\partial u}{\partial r}$:

$$\mu \frac{du}{dr} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{r}{2} + \frac{c_1}{r}$$

$$du = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{r}{2\mu} dr + \frac{c_1}{r\mu} dr$$

Integrando nuevamente:

$$\int du = \int \frac{\partial p}{\partial x} \frac{r}{2\mu} dr + \int \frac{c_1}{r\mu} dr$$

$$u = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\mu} \frac{r^2}{2} + \frac{c_1}{\mu} \ln r + c_2$$

$$u = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{4\mu} r^2 + \frac{c_1}{\mu} \ln r + c_2$$

Condiciones de borde:

$$r = 0 \rightarrow u = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{4\mu} r^2 + \frac{c_1}{\mu} \ln r + c_2 \rightarrow \nexists u \rightarrow c_1 = 0$$

$$r = R \rightarrow u = 0 = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{4\mu} R^2 + c_2 \rightarrow c_2 = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{4\mu} R^2$$

Reemplazando en la ecuación original:

$$u = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{4\mu} r^2 - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{4\mu} R^2$$

$$u = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{4\mu} (r^2 - R^2)$$

$$u = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

Perfil de velocidades media para un tubo circular.

Para $r = 0$

$$u = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{R^2}{4\mu} \text{ Máxima velocidad en el centro}$$

Para $r = R$

$u = 0$ La velocidad es nula en los bordes.

Ecuación de Hagen-Poiseuille.

Por definición de caudal:

$$Q = \int v \cdot dA = \int_0^R u \cdot 2\pi r dr$$

$$Q = \int_0^R \frac{\partial p}{\partial x} \frac{-R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot 2\pi r dr$$

$$Q = \int_0^R \frac{\partial p}{\partial x} \frac{-R^2}{4\mu} \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) \cdot 2\pi r dr$$

$$Q = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{-R^2}{4\mu} 2\pi \int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right) \cdot dr$$

$$Q = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{-R^2}{4\mu} 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right)_0^R$$

$$Q = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{-R^2}{4\mu} 2\pi \left[\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4R^2}\right) - 0\right]$$

$$Q = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{-R^2}{4\mu} 2\pi \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right)$$

$$Q = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{-R^2}{4\mu} 2\pi \frac{R^2}{4}$$

$$Q = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{16\mu} 2\pi R^4$$

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(2R)^2}{4} = \frac{\pi 4R^2}{4} = \pi R^2 \rightarrow \frac{\pi D^2}{4} = \pi R^2 \rightarrow \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2 = (\pi R^2)^2 \rightarrow \frac{\pi^2 D^4}{16} = \pi^2 R^4 \rightarrow R^4 = \frac{D^4}{16}$$

$$Q = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{16\mu} 2\pi \frac{D^4}{16}$$

$$Q = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{16\mu} \pi \frac{D^4}{8}$$

$$Q = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{128\mu} \pi D^4$$

Como en un flujo completamente desarrollado el gradiente de presión es constante $\frac{\partial p}{\partial x}$, la presión irá disminuyendo en el sentido del avance del fluido:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{l} = -\frac{\Delta_p}{l}$$

$$Q = -\left(-\frac{\Delta_p}{l}\right) \frac{1}{128\mu} \pi D^4$$

$$Q = \frac{\pi D^4 \Delta_p}{128\mu l}$$

La ecuación anterior se conoce como Ecuación de Hagen-Poiseuille, establece que en todo conducto en el cual su sección es despreciable con respecto a la longitud, la velocidad del fluido es función exclusiva de la diferencia de presiones en sus extremos.

Flujo turbulento en conductos circulares.

Si consideramos un elemento de fluido en el interior de un conducto tendríamos una fuerza debido a la diferencia de presiones:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) 2\pi \frac{r^2}{2} - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) 2\pi \frac{r^2}{2} + \left(\tau_{rx} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} \frac{dr}{2}\right) 2\pi r dx = 0$$

$$\frac{DP}{Dt} = F_{\text{sup}} + F_{\text{mas}} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho u dV + \int_{\text{Sup}C} \rho u V \cdot dy = 0$$

Se iguala a cero porque estamos trabajando sobre el eje de las x . Finalmente obteníamos:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} = \text{cte}$$

El problema ahora se presenta cuando trabajamos con un fluido turbulento ya que, las tensiones tangenciales.

La expresión que vimos $\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}$ nos permitía afirmar, para un fluido Newtoniano, que τ_{yx} queda en función de las derivadas primeras de las variables de campo. Al eliminar la componente vertical podíamos integrar y establecer que dependía solamente de un diferencial total.

Porque en la expresión primera sigue el diferencial volumen. Porque estamos tomando al diferencial volumen como un tubo y no como lo hicimos en el escurrimiento laminar.

Sabemos que el perfil de velocidades media de un escurrimiento turbulento es como sigue:

La figura *a* representa un flujo dentro de un conducto laminar con escurrimiento laminar, la *b* es para uno turbulento.

Existe una zona central en donde no existe variación de la velocidad respecto al eje y , es decir la velocidad es constante. Por eso en la ecuación

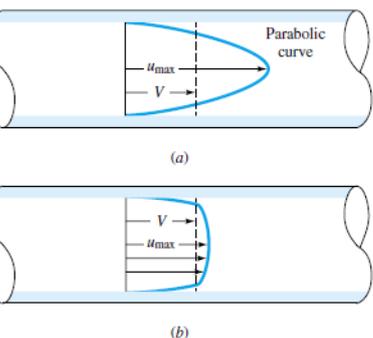
principal no efectuamos el factor $\left(r + \frac{dr}{2}\right)$ y $\left(r - \frac{dr}{2}\right)$ ya que permanece

constante. No seremos rigurosos en este caso, si colocáramos un dr posteriormente lo tendríamos que integrar. Si, como es este caso, sabemos que tenemos una zona central con velocidad constante y una variación de la misma en cercanía a las paredes del tubo, no es necesario utilizar el dr .

Para un escurrimiento turbulento:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{(u'v')}$$

Es un escurrimiento turbulento cuando $R_e > 1100$, son mayores las fuerzas inerciales. El primer término aparece en régimen laminar. El segundo término aparece porque si bien es unidimensional, solo existe u' , pero hay velocidades fluctuantes en el sentido longitudinal x , por eso aparece u' , también hay velocidades fluctuantes en el sentido



vertical v' , al aparecer $\overline{u'v'}$ indica que están correlacionadas. Es decir que existe una relación entre la fluctuación horizontal y la vertical. El vínculo es el signo, si una va para arriba la otra va hacia la izquierda; si una va hacia abajo la otra hacia la derecha. No son independientes, una implica a la otra.

Este nuevo término se agrega a la tensión tangencial original y muchas veces $\rho(u'v') \gg \mu \frac{\partial u}{\partial x}$

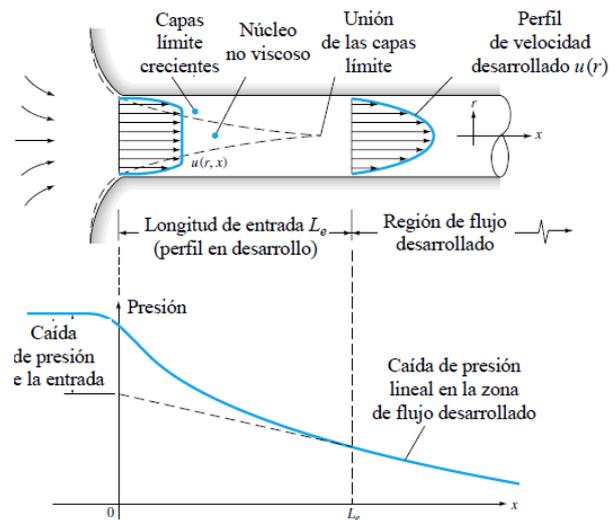
En régimen laminar la transferencia de cantidad de movimiento es perpendicular al escurrimiento se produce debido a la viscosidad, pequeños paquetes discretos de masa.

En régimen turbulento la transferencia de cantidad de movimiento perpendicular también es debida mayormente a la masa. Ella transporta la cantidad de movimiento. El signo es negativo porque al tratarse de un continuo, al subir una masa debe retroceder el otro paquete de masa que estaba originalmente.

El tubo se divide en tres zonas:

- Zona de comportamiento laminar, muy pequeña como si no existiera gradiente de presión, próximas a las paredes.
- Transferencia de cantidad de movimiento por masas del fluido $\overline{u'v'}$ alcanzan su valor máximo.
- Zona donde las velocidades medias son aproximadamente constantes. Hay pequeñas fluctuaciones de velocidades a causa de pulsos de presión $\frac{\partial p}{\partial x}$ propios de la naturaleza del régimen

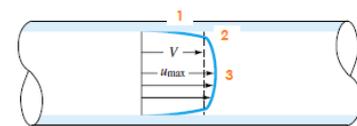
turbulento. Pero si se integra con el tiempo, se tiene velocidad constante. En esta zona no hay transferencia de cantidad de movimiento.



Las tres zonas pueden dividirse en una zona de pegamento, una de greda y finalmente una de aceite.

A fin de ejemplificar, consideremos una autopista con muchos carriles, los automóviles de los carriles exteriores irán a una velocidad menor que los del centro debido a que pudieran tocar las paredes de la carretera. Si en los primeros 30 carriles colocáramos algún adhesivo de contacto, la velocidad de los mismos aminorará.

Si un automovilista del carril de 200 km/h se desprende un paquete de galletitas, y este paquete impacta en un auto del carril de 120 km/h, la cantidad de movimiento transmitida es mínima, hablamos de un régimen laminar.



Si fuera el caso de que una persona salta por la ventanilla, a una velocidad muchísimo menor desde luego, la cantidad de masa desprendida es muchísimo mayor. Los paquetes de masa transmitidos en un régimen turbulento son verdaderos paquetes importantes de masa.

El término $\rho(u'v')$ es la densidad del fluido, representa la masa que transmite la cantidad de movimiento en el sentido perpendicular al escurrimiento.

Si existe un aumento de velocidad en u' a esta le corresponde una disminución de v' ; si la primera es positiva la segunda es negativa.

Apuntes de Cátedra: Mecánica de los Fluidos e Hidráulica

Carrera: Ingeniería Industrial

Si se pasa de un carril de baja velocidad a uno de mayor velocidad o viceversa, la regla de los signos es siempre negativa.

En las cercanías de las paredes del tubo el perfil de velocidades es lineal, escurrimiento laminar, si bien existe gradiente de presión, es tal la rugosidad de las paredes que las partículas se mueven como si fueran arrastradas únicamente por la placa superior.

El perfil de velocidades en la zona central es constante más plano que en un régimen laminar, si bien el escurrimiento es unidimensional, hay fluctuaciones en el eje vertical, pero son instantáneos y aleatorios. Si se integra respecto del tiempo, no hay un desplazamiento de masa neto en el sentido vertical.

La naturaleza propia del escurrimiento turbulento origina pulsos de presión que generan las fluctuaciones de velocidades.

Trabajaremos un poco la expresión anterior:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \rho(u', v')$$

Dividiendo por ρ :

$$\frac{\tau_{yx}}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\rho(u', v')}{\rho}$$

$$\frac{\tau_{yx}}{\rho} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u', v'}$$

$$\sqrt{\frac{\tau_{yx}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u', v'}}$$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ Viscosidad cinemática.

$$\sqrt{\frac{\tau_{yx}}{\rho}} = \sqrt{\nu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u', v'}}$$

$$u_x = \sqrt{\nu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u', v'}}$$

La operación anterior da por resultado la velocidad de transferencia de masa.

$\nu \frac{\partial u}{\partial y}$ Indica la cantidad de movimiento en el sentido perpendicular a la trayectoria régimen laminar.

$\overline{u', v'}$ Indica la cantidad de movimiento en el sentido perpendicular a la trayectoria régimen turbulento.

Es la capacidad que tiene el flujo para transferir cantidad de movimiento en el sentido perpendicular al movimiento teniendo en cuenta que se realiza por efectos viscosos e inerciales.

Si buscamos la proporción que existe de un efecto respecto al otro podríamos realizar el cociente:

$$\eta = \frac{v \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u', v'}}{\overline{u', v'}}$$

Veamos que sucede en cada caso:

$\overline{u', v'} = 0 \rightarrow v$ Muy grande. La transferencia de cantidad de movimiento la produce la viscosidad. Zona de Borde.

$\frac{y}{r} = \frac{1}{3}$ Borde $\rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow \overline{u', v'} = \text{Máxima}$ La cantidad de movimiento la produce la masa.

$\frac{y}{r} = 1 \Rightarrow \text{Centro} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow \overline{u', v'} = 0$ No hay gradiente de velocidad ni masa. La transferencia de la cantidad de movimiento la produce las fluctuaciones, la propia naturaleza del fluido.

Existen tres zonas de transferencia de cantidad de movimiento perfectamente definidas, por transferencia de masa predomina $\rho(\overline{u', v'})$, flujo laminar donde se hace a través de la viscosidad μ , y la ultima en la zona central propia de la fluctuaciones de la naturaleza del flujo turbulento.

Consideremos un fabricante estructuras metálicas como por ejemplo un carpintero de un pequeño pueblo, en semejanza con el flujo laminar de las paredes, y una compañía productora de tubos sin costura como por ejemplo Grupo Tenaris, de semejanza a la zona central del flujo turbulento, las estructuras organizativas son completamente diferentes; en la zona de transición de fluctuaciones nos encontramos con las Pymes. La universidad actúa como nexo a fin de generar pensamiento crítico en el alumno y despertar el desarrollo científico, con el fin de fortalecer la soberanía de un país.

En un escurrimiento laminar las expresiones diferenciales se obtienen y pueden integrarse ya sea únicamente por fuerzas viscosas, placa superior con movimiento, perfil de velocidades lineal, o bien ambas fijas perfil de velocidades en forma de parábola, las expresiones pueden integrarse y se encuentra un perfil medio de velocidades.

En un perfil de velocidades ocurren tres fenómenos simultáneamente no hay forma de encontrar un perfil de escurrimiento turbulento, no puede interpretarse como un continuo.

Energía. Consideraciones Intermedias.

Consideremos el escurrimiento de un fluido ideal a lo largo de un tubo de sección constante si aplicamos Bernoulli tenemos:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + z = cte$$

Energía de presión más energía cinética expresada en unidades de longitud más z que es la energía de posición.

Consideremos cinco puntos ubicados sobre una tubería:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = cte \rightarrow \frac{p_1}{\gamma} = 0 \wedge \frac{v_1^2}{2g} = 0 \Rightarrow H = z_1$$

En la parte superior del tanque, superficie libre, la presión debida al fluido es nula así como la velocidad de la partícula.

$$\frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 = cte \rightarrow z_2 = 0 \wedge \frac{v_2^2}{2g} = 0 \Rightarrow H = \frac{p_2}{\gamma}$$

La velocidad es nula debido a que estamos en el interior del reservorio aún, la altura es cercana a la base por eso es cero,

$$\frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g} + z_3 = cte \rightarrow z_3 = 0 \Rightarrow H = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g}$$

La energía de posición es nula porque estamos cerca de la base pero tenemos energía de presión y debida al movimiento de la partícula.

$$\frac{p_4}{\gamma} + \frac{v_4^2}{2g} + z_4 = cte \rightarrow z_4 = 0 \Rightarrow H = \frac{p_4}{\gamma} + \frac{v_4^2}{2g} = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g}$$

Como estamos considerando la partícula dentro del tubo de misma sección, no se producen variaciones apreciables.

$$\frac{p_5}{\gamma} + \frac{v_5^2}{2g} + z_5 = cte$$

Corresponden a una línea de corriente por eso es igual a una trayectoria constante.

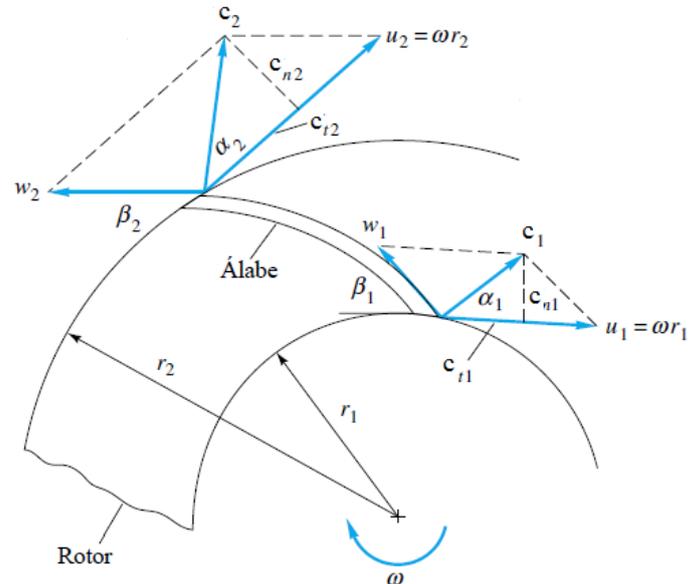
De esta forma pueden trazarse las líneas de los diagramas de alturas totales correspondientes a la suma de la energía de posición z , de presión o elástica $\frac{p}{\gamma}$ y energía cinética $\frac{v^2}{2g}$. Si se desprecia la $\frac{v^2}{2g}$ lo que obtenemos es la línea de alturas piezométricas. Generalmente se desprecia porque es muy pequeña con a energía de presión.

Vamos a considerar a continuación un fluido real:

Clase 7 hora 01:20:14

Máquinas Fluidodinámicas

Los diagramas de velocidades ideales se muestran en la figura de la derecha; se considera que el fluido entra en el rotor en $r = r_1$ con la componente de la velocidad w_1 paralela al álabe, con un ángulo β_1 , y la componente circunferencial $u_1 = \omega \cdot r_1$ igual a la velocidad de la punta de los álabes a la entrada del rotor. Su velocidad absoluta a la entrada es entonces la suma de los vectores w_1 y u_1 , representada por c_1 . Análogamente, el flujo de salida en $r = r_2$ tiene dos componentes: w_2 paralela al álabe, con un ángulo β_2 , y la velocidad del borde de salida $u_2 = \omega \cdot r_2$, dando como velocidad resultante c_2 .



Partiremos de la hipótesis que existen infinitos alabes por lo tanto, la configuración descrita va a ocurrirle a cada una de las partículas que ingresan, es así que todas ingresarán con una velocidad c_1 y van a salir con una velocidad c_2 , c_1 es la composición de u_1 y w_1 ; c_2 es la composición de u_2 y w_2 , insistimos en que todas las partículas de ingreso tienen estas componentes ya que por hipótesis se tienen infinitos alabes y además tienen la misma forma.

Para explicar el funcionamiento de una bomba elemental utilizaremos las leyes de la física, tales como, la segunda ley de Newton, el principio de conservación de la cantidad de movimiento o momento cinético, porque no debe olvidarse que la máquina está rotando por lo que, si existe un momento angular, hay un giro con respecto a ω .

Para ampliar la introducción dada, si construimos los triángulos de velocidades para c_1 tendríamos que el ángulo que forma u_1 con c_1 se llama α_1 , es el ángulo de la velocidad tangencial de giro con el ángulo de las partículas del fluido, y w_1 forma un ángulo con la horizontal al que llamaremos β_1 . Para la salida puede hacerse un análisis similar

Siempre el ángulo α_1 es el ángulo que forma la velocidad absoluta de la partícula c_1 respecto a la velocidad de giro u_1 en el sentido angular; β_1 es el ángulo que forma la velocidad relativa de la partícula w_1 respecto al álabe w_1 , y la continuación con la recta de acción de la velocidad u_1 . Se los conoce como ángulos característicos.

Comenzaremos con la primera ley de Newton:

$$F = ma = \frac{\gamma \cdot Q}{g} (c_2 - c_1) \rightarrow F = ma = \rho \frac{V}{t} (c_2 - c_1) = ma$$

Recordando la definición de momento cinético para turbomaquinas¹:

$$M = \rho \cdot Q (r_2 c_{t2} - r_1 c_{t1})$$

Que también podemos expresarlo como:

$$M = \frac{\rho Q}{g} (c_2 l_2 - c_1 l_1) = \frac{\rho Q}{g} (c_2 R_2 \cos \alpha_2 - c_1 R_1 \cos \alpha_1)$$

Las ecuaciones que pueden aplicarse son fuerza igual a masa por aceleración $F = m \cdot a$, que puede expresarse $\rho = \frac{\gamma}{g}$, dimensionalmente nos está dando densidad, caudal es volumen en unidad de tiempo $Q = \frac{V}{t}$, $c_2 - c_1$ es una diferencia de velocidades, es decir, sobre tiempo nos da la aceleración, densidad por volumen es masa, lo que nos está dando es la diferencia en la entrada y la salida, también se puede expresar de esta manera, por los que dimensionalmente es consistente.

Es decir lo planteamos de esta manera porque la diferencia se da en el volumen de control que está un infinitésimo a la entrada y un infinitésimo después de la salida. Por lo que cuando el fluido atraviesa la superficie del volumen de control hipotético, es como ya mencionamos, tiene una velocidad de ingreso c_1 y una de egreso c_2 , en donde c_1 ingresa en una inclinación que no es normal a la superficie tras el caudal, en donde c_2 es perpendicular a la superficie de salida tras el caudal.

Se tiene una velocidad c_1 y la diferencia con el área a la salida que es toda la envolvente, porque en otro sentido no puede haber escurrimiento ya que está la carcasa, para abajo tampoco puede salir, por el único lugar que puede salir es transversal al alabe.

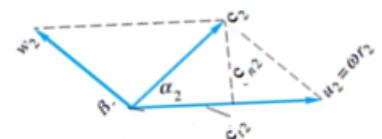
En definitiva lo que estamos haciendo es un análisis integral. El volumen de control es fijo, lo que se mueve es lo de adentro. Los diversos procesos que se dan dentro del mismo no pueden escapar a los límites del mismo.

Recordamos que la elección del volumen de control es clave ya que una incorrecta adopción podría trasladar complicaciones en vez de simplicidades, como por ejemplo distintos ángulos de velocidades. Se intenta de qué únicamente sobre la superficie de control aparezca la velocidad del fluido. Como la superficie del volumen de control es un infinitésimo antes y un infinitésimo después del alabe, no aparece la velocidad de giro en el sector de la superficie. La elección de la superficie de control debe ser tal que permita analizar las características que desean obtenerse, en nuestro caso, las velocidades.

Si tomamos a la fuerza entre la entrada y la salida, y unimos con una línea imaginaria un punto de la periferia del alabe, la distancia considerada será r_2 , que es el radio desde el centro a la periferia, de la misma manera podemos considerar r_1 .

Si continuamos la recta de acción de c_2 , y trazamos una perpendicular a la misma, dicha componente produce un momento, aparece una fuerza por una distancia, un brazo de palanca, porque es evidente que c_{2u} en este marco de referencia son componentes de fuerzas.

Si a c_2 multiplicamos por una constante, debido a que el caudal de ingreso es igual al de egreso, por lo tanto si a una fuerza la multiplicamos por el brazo de palanca del centro de giro produce un momento, dicho brazo lo llamaremos l_2 . Trazaremos a continuación el triángulo de velocidades sobre uno de los alabes, c_2 , ω_2 , u_2 y el ángulo se llamará β_2



Si α_2 está dada por la continuación de la horizontal con la tangente al punto, es decir a un lado tendremos un ángulo recto y en el otro extremo $90 - \alpha_2$. Por lo tanto l_2 que es brazo de palanca es $r_2 \cos \alpha_2$.

Si escribimos el momento tendremos:

$$M = \frac{\gamma \cdot Q}{g} (c_2 l_2 - c_1 l_1) = \frac{\gamma \cdot Q}{g} (c_2 R_2 \cos \alpha_2 - c_1 R_1 \cos \alpha_1)$$

El mismo análisis para l_2 puede hacerse par l_1 .

Las longitudes dadas son difíciles de medir ya que no es posible medir la recta de acción de la partícula, la prolongación de la recta de acción de la velocidad y la perpendicular a esa recta imaginaria que pasa por el centro nos da l_2 . Por lo que no hay forma de hacerlo en la práctica, aunque matemáticamente sea correcto.

Ahora bien la potencia es el momento por la velocidad angular ω , luego de hacer distributiva, llegamos a la expresión:

$$P = M \cdot \omega = \frac{\gamma \cdot Q}{g} (c_2 \cos \alpha_2 R_2 \omega - c_1 \cos \alpha_1 R_1 \omega)$$

La expresión $c_2 \cos \alpha_2$, nos da una proyección de c_2 en la dirección de u_2 entonces podemos agregar que c_{2u} es c_2 proyectado sobre u_2 , además es evidente que:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60}$$

$$u_2 = \frac{2\pi n}{60} r_2$$

$$u_2 = \pi d_2 n$$

Finalmente obtenemos la potencia de un fluido entre la entrada y la salida.

$$N = \frac{\gamma Q}{g} (c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1)$$

Desde nuestro ploteo inicial lo que hicimos fue un reemplazo de expresiones partiendo del momento angular y la potencia.

Ahora bien, la potencia hidráulica se define como $N_H = \gamma Q H$, como γ es peso específico, es peso por unidad de volumen. Es decir una fuerza por unidad de volumen, el caudal es el volumen en la unidad de tiempo, y H es la columna en metros de agua, por lo que es una longitud, fuerza por distancia obtenemos momento en la unidad de tiempo, es potencia. Es decir nos está dando el peso de un fluido para un caudal que se puede elevar a una determinada altura.

Si igualamos la potencia hidráulica a la potencia de salida, ahora despejaremos la altura a la que podría elevarse el fluido a la salida.

$$N_H = \gamma Q H = \frac{\gamma Q}{g} (c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1)$$

Estas relaciones se conocen como las ecuaciones de Euler de las turbomáquinas e indican que el par, la potencia y la altura manométrica ideal son función únicamente de las velocidades de las puntas de los álabes u_{1-2} y de las componentes tangenciales de la velocidad absoluta c_{1-2} , con independencia de las velocidades axiales, si las hubiera.

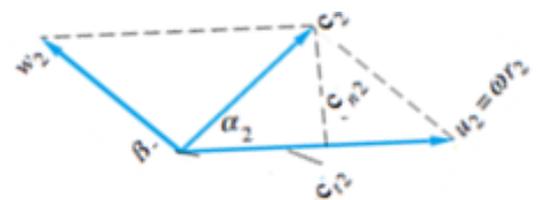
Por último obtenemos la altura manométrica que tendría el fluido una vez que sale, por la diferencia que se produce de energía, de altura o de potencia, en la entrada de la bomba y a la salida, siempre debida a la ganancia de presión.

Si recordamos el ejemplo del lavarropas una partícula que ingresa por el solo hecho de estar girando, a la salida gana energía de rotación, en nuestro caso la partícula de la periferia tiene mayor presión. Las partículas se dirigen desde el centro a la periferia porque con el sólo hecho de rotar se genera una acción centrífuga que origina una aceleración centrípeta hacia afuera. En este caso la partícula no puede salir porque es un recinto cerrado, por lo que eleva su altura, en otras palabras se "levanta". En la bomba la partícula ingresa y egresa, pero este escurrimiento debe realizarse en forma ordenada, para lo cual colocamos un alabe.

Ahora bien observamos la aparición de c_{2u} , que viene a ser la proyección de c_2 en la dirección de giro, u_2 no puede ser cero porque es la velocidad del alabe, c_{2u} únicamente puede serlo si c_2 es perpendicular a u_2 . En ese caso estaríamos afirmando que la partícula no se desplaza en ningún momento de su destino, más precisamente como si la partícula ingresa y sale y en ningún momento se acopla al alabe, afirmamos que la partícula debe desplazarse con el alabe, sino ésta no tendría componente c_{2u} . La velocidad ω es la velocidad relativa de la partícula sobre el alabe, porque debe moverse sobre el alabe indiscutiblemente ya que por hipótesis existen infinitos alabes y siempre lo hará sobre el mismo alabe. El alabe es lo que proporciona la potencia la partícula.

$$H = \frac{1}{g}(c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1)$$

Esta es la altura, la energía que posee la partícula a la salida, a simple vista no podemos apreciar la energía expresada como $(c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1)$, es decir la diferencia entre los productos de una proyección en el sentido de giro y la velocidad de giro a la salida y la entrada. Para poder comprender mejor esta forma de energía aplicaremos el teorema del seno y del coseno



Teorema de coseno

$$\omega_2^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2u_2c_2 \cos \alpha_2 \Rightarrow u_2c_2 \cos \alpha_2 = \frac{c_2^2 + u_2^2 - \omega_2^2}{2}$$

$$\omega_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2u_1c_1 \cos \alpha_1 \Rightarrow u_1c_1 \cos \alpha_1 = \frac{c_1^2 + u_1^2 - \omega_1^2}{2}$$

Teniendo en cuenta las proyecciones podemos expresarlo como:

$$c_{2u}u_2 = u_2c_2 \cos \alpha_2$$

$$c_{1u}u_1 = u_1c_1 \cos \alpha_1$$

Teniendo en cuenta la expresión vista en clases anteriores referentes a la altura teórica infinita y efectuando los cálculos con la ayuda del teorema del coseno llegamos a:

$$H_{T\infty} = \frac{1}{g} \left(\frac{c_2^2 + u_2^2 - \omega_2^2 - (c_1^2 + u_1^2 - \omega_1^2)}{2} \right)$$

$$H_{T\infty} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2g}$$

$$H_{T\infty} = H_{D\infty} + H_{P\infty} + \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2g}$$

$H_{T\infty}$ Altura teórica infinita. (Fluido ideal, no existen efectos viscosos). El símbolo ∞ corresponde a los alabes.

$H_{P\infty}$ Altura de presión.

$H_{D\infty}$ Altura dinámica.

Existe un número adimensional $\rho = \frac{H_{P\infty}}{H_{T\infty}}$ en donde debe cumplirse:

$\rho = 1 \Rightarrow H_{T\infty} = H_{P\infty}$ La altura total es igual a la altura de presión. $H_{D\infty} = 0 \Rightarrow c_{21} = c_1$ la partícula no sale. Que es un hecho imposible.

El caso de $\rho = 1$ solo existe si desaparece la velocidad de ingreso de la partícula c_1 y solo tendríamos c_2 . Como es el caso de las bombas volumétricas. En donde básicamente el dispositivo toma pequeños volúmenes y los desaloja rápidamente, pero debe entenderse que hablamos de fluidos compresibles, que escapan al alcance de la asignatura, ya que únicamente nos ocupamos de la cinemática y la dinámica de fluidos que por hipótesis son incompresibles.

$\frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}$ En este caso la diferencia cuadrática de las velocidades de ingreso y egreso de la partícula nos dan la energía cinética de la partícula, dividida entre la gravedad consistentemente nos da unidades de longitud.

$\frac{u_2^2 - u_1^2}{2g}$ En este caso la diferencia cuadrática de las velocidades de giro en la periferia tanto para el ingreso y egreso de la partícula nos dan la energía de presión, dividida entre la gravedad consistentemente nos da unidades de longitud.

$\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2g}$ En este caso la diferencia cuadrática de las velocidades relativas de las partículas sobre el alabe en el ingreso y egreso de la partícula nos dan la energía de presión adicional por la forma de los alabes, dividida entre la gravedad consistentemente nos da unidades de longitud. La razón por la cual se invierten las diferencias es porque en la periferia la velocidad angular disminuye; $\omega_1^2 > \omega_2^2$ El caudal es el mismo por ser un proceso estacionario, pero aumenta la sección de paso, la velocidad de la partícula sobre el alabe en el sentido del escurrimiento debe disminuir en la salida.

Podemos observar que la partícula adquiere ganancia de energía cinética, ganancia de presión por el solo hecho de estar girando, y una ganancia adicional debida a la forma de las alabes. Lo que nos interesa en nuestro estudio de bombas centrífugas es que la ganancia de presión sea máxima, la primer forma queda reducida a las bombas axiales que veremos más adelante.²

Insistimos en que la partícula sale de la bomba al exterior debida a c_{2u} , cuando ésta será imposibilitada de salir cuando la proyección de c_2 sobre u_2 sea nula es decir, ambas sean perpendiculares, las ganancias adquiridas serán mayores cuanto mayor sea el módulo de c_{2u} . El valor de u_2 queda definida por la configuración geométrica que se adopte, π es una constante, d_2 puede ser variable, y n quedará definido por el motor eléctrico a acoplarse, como puede apreciarse son condiciones externas a la bomba. Los valores que tienen incumbencia sobre la bomba son c_{1-2} y ω_{1-2} . La primera queda definida por la red del suministro de agua y la segunda por la forma en que sea torneado el alabe.

En mecánica de fluidos habíamos comenzamos con la presentación de un campo de velocidades, y ahora estamos viendo triángulos de velocidades de un fluido dentro de máquinas fluidodinámicas, a modo de fijar conceptos todas las afirmaciones vistas son únicamente validas cuando el fluido posee movimiento. Es una maquina que transforma energía en otra forma de energía en nuestro caso, energía mecánica en cinética y de presión, y al haber una velocidad de ingreso y egreso tenemos las Ecuaciones de Navier-Stock. Las partículas antes de ingresar a la bomba se mueven por un conducto cerrado, en donde pueden intervenir un fluido ideal, real, línea piezométrica, Teorema de Bernoulli, análisis integral, primera segunda ley de Newton, conservación del momento cinético. Sería muy difícil realizar un análisis diferencial, ya que tenemos movimientos entre el alabe y la partícula. Lo que nos hace conveniente la elección de un volumen de control y la selección de las superficies del mismo es que sólo tenemos datos a la entrada y a la salida de la bomba, no sabemos lo que sucede en el interior de la máquina sólo tenemos registros de las magnitudes de las velocidades es en el flujo de ingreso y egreso, correspondiente a la superficie del volumen de control seleccionado (análisis integral). En el caso de un incendio usted estará preocupado por salir del edificio, no como va a chocar con otras personas mientras escapa.

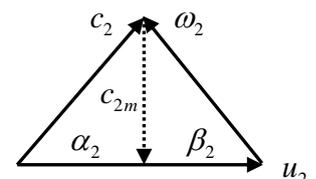
Sabemos que la partícula adquiere energía, como consecuencia de la diferencia que en la velocidad de ingreso y egreso; lo que buscaremos es que la potencia hidráulica $H_{T\infty}$ sea máxima (altura de presión),

Necesitamos que la energía cinética sea mínima y la de presión sea máxima por lo tanto $H_{D\infty}$ tiene que sea cero, teniendo en cuenta la expresión:

$$H_{D\infty} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g},$$

es evidente en este caso que c_1 no puede ser cero ya esta es la velocidad de ingreso de la

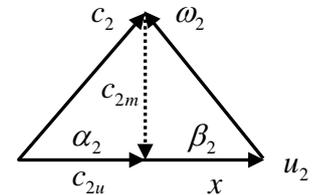
partícula, en principio no podemos tener una $H_{D\infty}$ nula, pero si podemos reducirla al mínimo, para ello vamos a eliminar una de sus componentes, específicamente la proyección sobre u_1 es decir $c_{1u} = 0$ por lo que c_1 debe ser perpendicular a la bomba. Esto puede lograrse colocando unos alabes directores que lo canalicen perpendicularmente, es decir en el ingreso se le da cierta curvatura para que el fluido ingrese perpendicular.



No debe perderse de vista el fin práctico de este análisis que consiste en construir la máquina, para ello lo primero que hacemos es adoptar un caudal de entrada, se define el diámetro de la brida, tanto para el ingreso y el egreso, y finalmente se determina la velocidad c_1 que debe ser perpendicular (para no tener componente sobre el sentido de giro), para que a la salida la potencia sea máxima, el valor de $u_1 = \pi \cdot d_1 \cdot n$ puede

calcularse con los datos impuestos. Adoptamos una escala y a continuación trazamos el triángulo de velocidades, como base colocamos u_2 y perpendicular a ella c_{2m} el triángulo se cierra con la componente ω_2 , además podemos obtener el valor de β_2 con este ángulo el constructor puede darle la forma al alabe. En este punto dimensionamos el sistema a la entrada.

Ahora, de la misma manera que determinamos las características de torneado para la entrada, veremos cómo obtenemos las de la salida. El análisis visto hasta el momento corresponde a un único caudal porque si este variara deberán repetirse los cálculos para dimensionar nuevamente la máquina. Si el caudal cambia, la partícula en su ingreso buscará β_1 al no encontrarlo chocará contra el alabe aumentando las pérdidas. La máquina va a funcionar igual, pero no es el punto óptimo de diseño, afectando el "rendimiento", destacamos que no es apropiado utilizar este término ya que estamos hablando de condiciones ideales.



Nuevamente $u_2 = \pi d_2 n$ es dato, el caudal $Q = \pi d_2 b_2 c_{2m}$, en donde c_{2m} es la componente meridional a la salida, es la velocidad perpendicular a la salida, despejando obtenemos:

$c_{2m} = \frac{Q}{\pi d_2 b_2}$ También podemos considerarla como un dato. Lo que no podemos definir por el momento es el ángulo

β_2 que por el momento quedará indefinido, no pudiendo así cerrar el triángulo a la salida. No podemos determinar con precisión el ángulo de torneado a la salida.

$$H = \frac{1}{g} (c_{2u} u_2 - c_{1u} u_1) \Rightarrow c_{1u} = 0 \Rightarrow H = \frac{1}{g} (c_{2u} u_2)$$

$$H_{T\infty} = \frac{1}{g} u_2 (u_2 - x)$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{c_{2m}}{x} \Rightarrow x = \frac{c_{2m}}{\operatorname{tg} \beta_2}$$

$$H_{T\infty} = \frac{1}{g} u_2 \left(u_2 - \frac{c_{2m}}{\operatorname{tg} \beta_2} \right)$$

Ahora bien sabemos que c_{2m} es perpendicular a u_2 y por lo tanto coincide con c_{1m} entonces haremos la siguiente afirmación: $c_{1m} = c_{2m}$, no debe perderse de vista que nuestra intención es desarrollar estas herramientas trigonométricas intermedias para alcanzar a una expresión de las características de la salida del fluido.

El caudal a la entrada esta dado por:

$$Q = \pi d_1 b_1 c_{1m} \approx \pi d_2 b_2 c_{2m},$$

$$H_{T\infty} = \frac{1}{g} u_2 \left(u_2 - \frac{Q}{\pi d_2 b_2 \text{tg} \beta_2} \right) = \frac{1}{g} u_2^2 - \frac{u_2 Q}{\pi d_2 b_2 g \text{tg} \beta_2}$$

$$A = \frac{1}{g} u_2^2$$

$$B = \frac{u_2}{\pi d_2 b_2 g}$$

$$H_{T\infty} = A - B \frac{Q}{\text{tg} \beta_2}$$

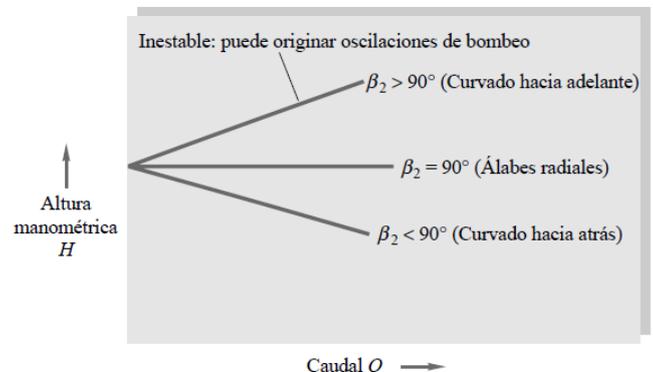
Además aclaramos que $c_1 = c_{1m}$ porque el fluido ingresa perpendicularmente. Normalmente se impone que la velocidad de ingreso sea coincidente con la velocidad en el sentido meridional. Para ello se busca en la practica una relación entre $b_1 \cong b_2$.

Los valores que pueden ser determinados a través de mediciones los agruparemos en constantes como lo son A y B , es decir corresponden a las condiciones de la maquina que se adopten es decir las características geométricas; el caudal y el ángulo de salida no pueden ser incluidos en estas constantes. Esto nos permite cuestionarnos cómo podemos obtener información de β_2 vinculándolo con el caudal. La última expresión nos muestra la relación lineal existente entre $H_{T\infty}$ y Q .

La altura manométrica varía linealmente con el caudal Q ,

tomando el valor $A = \frac{1}{g} u_2^2$ para caudal nulo, donde u_2 es la

velocidad del borde de salida del álabe. La pendiente es negativa si $\beta_2 < 90^\circ$ (álabes curvados hacia atrás) y positiva para $\beta_2 > 90^\circ$ (álabes curvados hacia adelante). Este efecto se muestra en la figura y sólo es aplicable para caudales bajos. La altura manométrica real de una bomba para caudal nulo es sólo un 60 por 100 del valor teórico. Con el empleo de la anemometría láser doppler³ se han podido realizar medidas detalladas del flujo tridimensional en el interior de bombas, animando incluso los datos en forma de película.



De las tres alternativas presentadas deduciremos cual es la que produce el funcionamiento optimo de la máquina.

Cuando la pendiente de la curva de altura manométrica es positiva, el flujo puede ser inestable y presentar oscilaciones de bombeo, un fenómeno oscilatorio en el que el punto de funcionamiento de la bomba "persigue" al punto de funcionamiento normal. En el caso de bombas, las oscilaciones de bombeo pueden dar lugar a un mal funcionamiento de las mismas; sin embargo, en el caso de compresores pueden presentarse problemas muchos mayores. Por esta razón se prefiere generalmente un diseño con álabes radiales o curvados hacia atrás.

Dada la expresión vista, multiplicamos y dividimos por dos:

$$H_{T\infty} = \frac{1}{g}(c_{2u}u_2) = \frac{2}{2g} \frac{1}{2}(c_{2u}u_2), \text{ además sabemos que el grado de reacción } \rho = \frac{H_{P\infty}}{H_{T\infty}} \text{ energía de presión sobre}$$

energía total, recordando que la altura dinámica es $H_{D\infty} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}$, si utilizamos Pitágoras obtenemos que:

$$c_2^2 = c_{2u}^2 + c_{2m}^2$$

$$c_1^2 = c_{1u}^2 + c_{1m}^2$$

$$H_{D\infty} = \frac{c_{2u}^2 + c_{2m}^2 - (c_{1u}^2 + c_{1m}^2)}{2g} \text{ Además la máquina se diseña para que } c_{2m} = c_{1m} \text{ y } c_{1u} = 0 \text{ entonces:}$$

$$H_{D\infty} = \frac{c_{2u}^2}{2g}$$

Aclaremos que el caudal así como las velocidades son aproximadamente iguales, así como también la sección, lo que mantiene la proporcionalidad entre las secciones es el perímetro, es decir el ancho de la sección, que es mucho menor en la entrada que en la salida.

$$H_{T\infty} = H_{D\infty} + H_{P\infty}$$

$$H_{P\infty} = H_{T\infty} - H_{D\infty} = \frac{2}{2g} \frac{1}{2}(c_{2u}u_2) - \frac{c_{2u}^2}{2g} = \frac{2c_{2u}u_2 - c_{2u}^2}{2g}$$

$$\rho = \frac{H_{P\infty}}{H_{T\infty}} = \frac{\frac{2c_{2u}u_2 - c_{2u}^2}{2g}}{\frac{2}{2g} \frac{1}{2}(c_{2u}u_2)} = \frac{2c_{2u}u_2 - c_{2u}^2}{2g} \frac{2g}{2c_{2u}u_2} = \frac{2c_{2u}u_2 - c_{2u}^2}{2c_{2u}u_2} = 1 - \frac{c_{2u}^2}{2c_{2u}u_2} = 1 - \frac{c_{2u}}{2u_2}$$

Veremos cómo se comportan las alturas hidráulicas en función de c_{2u} :

β_2	$H_{T\infty}$	$H_{D\infty}$	$H_{P\infty}$	ρ	c_{2u}
$\beta_2 < 90^\circ$	0	0	0	1	0
$\beta_2 = 90^\circ$	$\frac{c_{2u}^2}{2g}$	$\frac{c_{2u}^2}{2g}$	$\frac{c_{2u}^2}{2g}$	$\frac{1}{2}$	u_2
$\beta_2 > 90^\circ$	$\frac{2u_2^2}{g}$	$\frac{2u_2^2}{g}$	0	0	$2u_2$

- 1- Fluid Mechanics - Frank M. White – “Momento cinético” Pag 160.
- 2- Recuerde el ejemplo de congestión vehicular dentro de un túnel con una curva a 90° (bomba centrífuga), o bien un túnel recto (bomba axial).
- 3- El anemómetro láser permite medir velocidades de fluidos, sean estos líquidos o gaseosos, sin interferir en la dinámica de estos. Su principio de funcionamiento se basa en la interferencia producida por partículas suspendidas en el fluido que dispersan la onda electromagnética proveniente de un haz láser.

Parámetros de Diseño.

En base a un caudal Q adoptado, las condiciones de diseño que encontramos en el tema anterior fue que $\alpha_1 = 90^\circ$ para que $H_{T\infty} = \frac{1}{g}(c_{2u}u_2)$ sea máximo. Además concluimos en base al gráfico de alturas hidráulicas que para que la energía de presión $H_{P\infty}$ sea mayor a la energía cinética $H_{D\infty}$ debe cumplirse que $\beta_2 < 90^\circ$.

Adoptamos que $\beta_2 < 90^\circ$ debido a que las líneas de corriente tienen un comportamiento lineal, es decir, es de esperar que el sistema de escurrimiento tenga líneas más paralelas. Si $\beta_2 = 90^\circ$ el alabe debería tener una contracurvatura para dirigir al fluido y lograr que ω_2 sea perpendicular a u_2 , lo que originará un desprendimiento del fluido respecto al alabe. Si $\beta_2 > 90^\circ$ la zona de desprendimiento aumenta en el otro sentido. En los últimos dos casos se producen pérdidas por desprendimiento, porque no pueden sostenerse las líneas de corrientes paralelas entre sí; En los casos mencionados la $H_{P\infty}$ disminuye, si bien excede a los objetivos del curso, intentaremos simplificar y explicar los conceptos, las líneas de corriente formadas en un punto específico sobre la superficie de control, forman el triángulo de velocidades visto, se origina un embudo, en el cual las líneas de corriente pasan de una forma uniforme a una zona de desprendimiento induciendo remolinos y posteriormente pérdidas. Finalmente, para que $H_{P\infty}$ aumente respecto a $H_{D\infty}$ tiene que existir un escurrimiento constante y uniforme.

Hasta el momento realizamos el análisis integral en base a la superficie del volumen de control adoptado, ahora intentaremos explicar cómo se comporta la partícula en el interior de la bomba, además de deducir cual es la forma que deberían tener los infinitos alabes.

Para comprender lo que sucede en el interior de la bomba, y dado que existe la imposibilidad de realizar un análisis diferencial, debido principalmente a la presencia de velocidades relativas entre partículas, y siendo uno de los objetivos que nos interesa, conocer la forma del alabe, aplicaremos Bernoulli, porque su enunciado establece que a lo largo de la trayectoria de una partícula la sumatoria de las energías deben ser constantes para un fluido ideal.

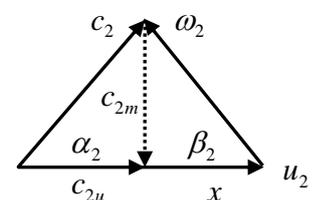
La $H_{T\infty}$ debido a las $H_{D\infty}$ y $H_{P\infty}$ será nuestra energía, recordando la hipótesis de infinito número de alabes, escurrimiento irrotacional, por ser infinitos número de alabes es irrotacional es decir cada punto tiene la misma velocidad, fluido incompresible e ideal.

Recordemos la expresión:

$$H_{T\infty} = \frac{1}{g}u_2 \left(u_2 - \frac{c_{2m}}{\operatorname{tg}\beta_2} \right)$$

La misma hace referencia a una forma de energía que se produce en el interior del rodete, compuesta por dos formas de energía básicas cinética y de presión. Lo que interesa en nuestro análisis de bombas centrífugas es que $H_{P\infty}$ se máxima y además por el solo hecho de rotar las partículas que están más alejadas ganan presión.

Pregúntese usted lo siguiente, dado un fluido en reposo él cual comienza a girar a una determinada velocidad angular ω cual debe ser la altura recipiente para que no rebalse. Por ejemplo una licuadora. En nuestro caso el fluido debe ingresar y salir con la mayor



Vamos a recurrir nuevamente al triángulo de velocidades para nuestro análisis.

La componente c_{2u} nos indica una velocidad en el sentido de giro, debe estar dirigida hacia afuera, pero acompañar al giro para absorber el momento angular. Por ejemplo el empuje que recibe un individuo al salir de un establecimiento si las condiciones climáticas fueran con presencia de vientos fuertes, el viento ejerce un momento respecto a la velocidad de la trayectoria original. Si $c_{2u} = 0$ la partícula ingresa y sale de la bomba en forma recta, es decir en ningún momento la arrastra el alabe. Esto no puede suceder ya que estamos en presencia de infinitos alabes.

$$H_{T\infty} = H_{D\infty} + H_{P\infty} + H_{D\infty}$$

$$H_{T\infty} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2g}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli a la entrada y a la salida del rodete, incluyendo la $H_{T\infty}$ suministrada, obtenemos:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{c_1^2}{2g} + H_{T\infty} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2g}$$

Reemplazando $H_{T\infty}$,

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{c_1^2}{2g} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} + \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2g}$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{c_1^2}{2g} + \frac{c_2^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} + \frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{\omega_1^2}{2g} - \frac{\omega_2^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{c_2^2}{2g}$$

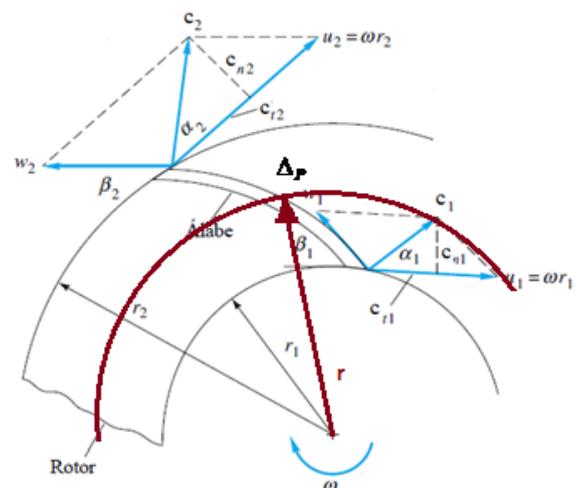
$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{\omega_1^2}{2g} - \frac{\omega_2^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma}$$

Agrupando convenientemente a ambos lados de la ecuación:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{\omega_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} - \frac{u_2^2}{2g} + \frac{\omega_2^2}{2g} = cte \Rightarrow z + \frac{p}{\gamma} - \frac{u^2}{2g} + \frac{\omega^2}{2g} = cte$$

La nueva expresión de Bernoulli corresponde a la existencia del movimiento relativo entre partículas.

Vamos a tomar nuevamente nuestro rodete y consideraremos un radio de curvatura comprendido entre r_2 y r_1 . Si existe c_{2u} en el punto considerado, por principio de conservación del momento angular vendrá acompañada de un momento angular M sobre la partícula.¹



Entonces si hay un momento angular que c_{2u} se traslade en el sentido de giro, es evidente que debe existir un momento contrario, principio de acción y reacción. Como estamos hablando de un fluido ideal la única fuerza superficial que puede haber son las debidas a la energía de presión, no hay fuerzas tangenciales. Sobre el punto indicado sobre el alabe se genera dicha fuerza perpendicular a la superficie, esta fuerza normal origina una variación de presión Δ_p ; el momento que se opone a la causa que lo origina, produciendo energía, podemos expresarlo como:

$$M^r = F \cdot r = \Delta_p \cdot r$$

Al existir infinitos alabes podemos considerar que en el punto de estudio existen dos partículas infinitamente próximas, separadas por el alabe y en contacto con la superficie, que estarán siempre sobre la misma línea de fuerza, tendrá un momento, a la cual también aplicaremos Bernoulli.

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \frac{u_1^2}{2g} + \frac{\omega_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} - \frac{u_2^2}{2g} + \frac{\omega_2^2}{2g}$$

Si consideramos que las partículas se encuentran a la misma altura $z_1 = z_2$, $\omega_1 = \omega_2$, $u_1 = u_2$, lo que nos da por resultado:

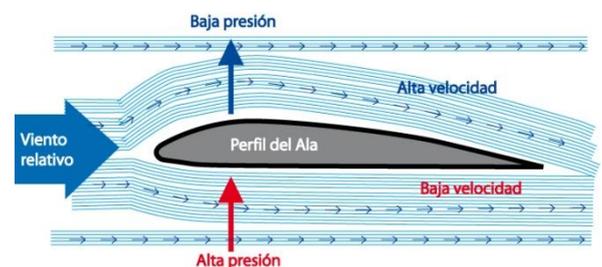
$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} \Rightarrow p_1 = p_2 \Rightarrow \Delta_p = 0$$

Lo que nos dice la ecuación anterior es que las fuerzas en el punto serían iguales y contrarias y el momento nos quedaría:

$$M^r = \Delta_p \cdot r = 0 \cdot r \xrightarrow{\text{tiende}} \infty$$

Los que nos proporciona una indeterminación, lo que nos permite decir es que hay alabes finitos, nuestras hipótesis iniciales ya dejan de ser aplicables, tendremos triángulos de velocidades diferentes tanto a la entrada como a la salida. Ahora bien seguimos teniendo una velocidad uniforme dirigida hacia la salida y además se adiciona una velocidad en el sentido del escurrimiento de un lado del alabe y del otro lado en el sentido contrario.

Si consideramos la suma algebraica de las velocidades mencionadas obtenemos un nuevo grafico, resultado de la superposición de ambas, que origina una parábola. Si no se cumpliera la partícula atravesaría la bomba y no absorbería momento. Es decir transferencia de cantidad de movimiento. Exigimos entonces que $\Delta_p \neq 0$. La forma del alabe es la que generará la diferencia de presión necesaria. Por ejemplo el ala de un avión. La partícula que recorre el perfil por arriba recorre menor longitud que la que lo hace por debajo, la que atraviesa el alabe por arriba lo hará a mayor velocidad que por debajo, es así que la presión sobre el alabe será menor que por debajo. Lo que se conoce como principio de sustentación.²

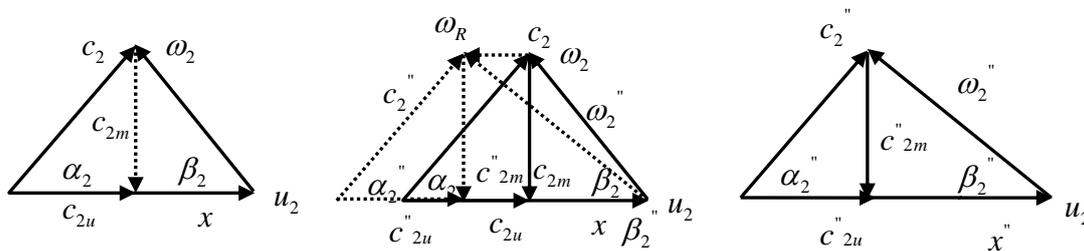


Lo que intentamos explicar el escurrimiento que atraviesa un perfil aerodinámico automáticamente recibe una fuerza perpendicular a la trayectoria que se denomina fuerza de sustentación. Dicha fuerza separa las líneas de corriente generan un momento y finalmente produce la sustentación.

Aclaremos que no es posible este fenómeno desde el punto de vista de un fluido ideal, ya que lo que verdaderamente existe es un desprendimiento de capa límite de un fluido viscoso real. Estamos trabajando con un fluido ideal y no podemos justificarlo como realmente se comporta. Intentaremos hacer la abstracción matemática de este fenómeno real, conviniendo previamente la existencia del fenómeno anterior descrito.

Por lo tanto si en la parte superior del alabe se aceleró la partícula debida a una diferencia de presión. Agregaremos una integral de circulación, que defina una velocidad de giro ω_R en el sentido opuesto. Este artificio matemático intenta reproducir un fenómeno físico de la componente de velocidad mencionada que no interviene con el fenómeno de escurrimiento de fluido, entonces, a la salida va a adicionarse a la velocidad ω_2 por ser colonial con ella y de sentido contrario la velocidad c_2 se habrá modificado.

A continuación esquematizaremos como afectaría la introducción de ω_R al diagrama de velocidades original:



Al disminuir c_{2u} comparándola con la original, se produce la diferencia Δ_p y hace que aparezca la fuerza de sustentación perpendicular a la trayectoria sin hablar en ningún momento de un fluido real.

Nos encontramos ahora que el efecto de la integral de circulación aumenta una de las velocidades y reduce la otra, ya no son iguales ω_1 y ω_2 , es decir las velocidades a ambos lados del alabe para la misma partícula son diferentes, la de la derecha posee mayor velocidad que la de la izquierda. Podemos agregar que al no ser infinitos alabes, aparece la integral de circulación.

Por lo tanto concluimos que la forma del perfil del rotor debe ser aerodinámico.³

Habiendo abandonado la hipótesis de los alabes infinitos nuestra altura teórica ya no más infinita nos quedará de la siguiente manera:

$$H_T = \frac{1}{g} u_2 (c_{2u} - \omega_R)$$

Multiplicando y dividiendo por c_{2m} , para obtener un número adimensional que utilizaremos después como referencia:

$$H_T = \frac{c_{2u}}{c_{2m}} \frac{1}{g} u_2 (c_{2u} - \omega_R) = \frac{c_{2u} u_2}{g} \left(\frac{c_{2u} - \omega_R}{c_{2u}} \right)$$

$$H_T = \frac{c_{2u} u_2}{g} \left(1 - \frac{\omega_R}{c_{2u}} \right)$$

Llamando disminución de trabajo $e = \left(1 - \frac{\omega_R}{c_{2u}}\right)$ debido a que no es pérdida de rendimiento porque estamos hablando de condiciones ideal. También conocido como “reducción debida a la circulación”.

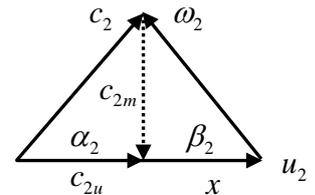
$$H_T = -\frac{1}{g} c_{2u} u_2 e$$

Nuevamente insistimos que el fluido no circula interiormente, lo que sucede es un fenómeno conocido como desprendimiento de capa límite, si bien no es motivo del curso, recordamos al estudiante ver lo apartados adjuntos en donde se explica rigurosamente este principio.

Leyes de semejanza

Ahora bien, ya hemos eliminado las hipótesis de alabes infinitos y definimos que este debía ser un perfil aerodinámico, buscaremos ahora encontrar la altura final a la salida de la bomba H , para ello utilizaremos las leyes de semejanza.

La razón por la cual es que únicamente estamos desarrollando el diseño de bombas centrífugas de las tres posibles, la mencionada, axial y diagonal, es que estamos trabajando en un plano (x, y) con vectores bidimensionales, para los otros tipos de bombas es necesario trabajar en el espacio cada vector velocidad tendrá componentes tridimensionales por ejemplo $c = c(x, y, z)$ también podemos mencionar las nueve componentes del vector aceleración convectiva. Al trabajar en el plano practicamos un corte transversal y trabajamos con los valores absolutos no con las componentes de c . Son absolutamente más sencillos de trabajar, las axiales y diagonales las estudiaremos más adelante con la ayuda de los diagramas de curvas características.



Recordando las expresiones a las que habíamos llegado en la introducción del tema, a fin de obtener las características a la salida del fluido fueron:

$$H = \frac{1}{g}(c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1) \Rightarrow c_{1u} = 0 \Rightarrow H = \frac{1}{g}(c_{2u}u_2)$$

$$H_{T\infty} = \frac{1}{g}u_2(u_2 - x)$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{c_{2m}}{x} \Rightarrow x = \frac{c_{2m}}{\operatorname{tg}\beta_2}$$

$$H_{T\infty} = \frac{1}{g}u_2\left(u_2 - \frac{c_{2m}}{\operatorname{tg}\beta_2}\right)$$

Eliminando la hipótesis de los alabes infinitos: $H_T = \frac{1}{g}u_2\left(u_2 - \frac{c_{2m}}{\operatorname{tg}\beta_2}\right)$

En la bibliografía consulta suele hacerse el análisis en forma general obviándose el sufijo "2", en este caso trabajaremos en forma extendida.

Aplicaremos primeramente el teorema del seno:

$$\frac{c_2}{\operatorname{sen}\beta_2} = \frac{\omega_2}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{u_2}{\operatorname{sen}(\alpha_2 + \beta_2)}$$

$$\operatorname{sen}\alpha_2 = \frac{c_{2m}}{c_2} \Rightarrow c_{2m} = c_2 \cdot \operatorname{sen}\alpha_2 = \frac{u_2 \cdot \operatorname{sen}\beta_2}{\operatorname{sen}(\alpha_2 + \beta_2)} \operatorname{sen}\alpha_2$$

Volviendo a la expresión original y reemplazando:

$$H_T = \frac{1}{g} u_2 \left(u_2 - \frac{c_{2m}}{\operatorname{tg} \beta_2} \right) = \frac{1}{g} \left(u_2^2 - u_2 \frac{c_{2m}}{\operatorname{tg} \beta_2} \right) = \frac{1}{g} \left(u_2^2 - u_2 \frac{\frac{u_2 \cdot \operatorname{sen} \beta_2}{\operatorname{sen}(\alpha_2 + \beta_2)} \operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{tg} \beta_2} \right) = u_2^2 - u_2^2 \frac{\operatorname{sen} \beta_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen}(\alpha_2 + \beta_2) \operatorname{tg} \beta_2}$$

$$H_T = \frac{1}{g} u_2^2 \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \beta_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{\operatorname{sen}(\alpha_2 + \beta_2) \operatorname{tg} \beta_2} \right)$$

Lo que tenemos dentro del paréntesis es función únicamente de los ángulos por

lo que podemos construir una función $K : K(\alpha_2; \beta_2)$ por lo que la ecuación nos quedará:

$$H_T = \frac{1}{g} u_2^2 \cdot K, \text{ ahora bien vamos a multiplicar y dividir la expresión por 2:}$$

$$H_T = \frac{1}{2g} u_2^2 \cdot 2K \text{ Despejando la velocidad obtenemos:}$$

$$u_2 = \sqrt{2gH_T \cdot \frac{1}{2K}} = \sqrt{2gH_T} \cdot \frac{1}{\sqrt{2K}} \text{ Llamaremos a } K_u = \frac{1}{\sqrt{2K}} \text{ este nuevo valor es un número adimensional que establece una relación funcional entre } \alpha_2 \text{ y } \beta_2$$

$$u_2 = \sqrt{2gH_T} \cdot K_u \text{ Nuevamente aclaramos que el valor de } K_u \text{ está definido únicamente para un único caudal } Q \text{ al variar este, corresponde a una nueva función.}$$

Nuestro objetivo es encontrar el coeficiente adimensional en función de un diseño.

Volviendo a la expresión original e introduciendo $K' = K_u$:

$$H_T = \frac{1}{g} u_2^2 \cdot K' \Rightarrow \frac{\omega_2}{\operatorname{sen} \alpha_2} = \frac{u_2}{\operatorname{sen}(\alpha_2 + \beta_2)} \therefore u_2 = \frac{\omega_2}{\operatorname{sen} \alpha_2} \operatorname{sen}(\alpha_2 + \beta_2)$$

$$H_T = \frac{1}{g} \left(\frac{\omega_2}{\operatorname{sen} \alpha_2} \operatorname{sen}(\alpha_2 + \beta_2) \right)^2 \cdot K'$$

$$H_T = \frac{1}{2g} \omega_2^2 \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha_2 + \beta_2)}{\operatorname{sen}^2 \alpha_2} \cdot 2K' \text{ Nuevamente incluimos el tercer término dentro de } K' \text{ y además multiplicamos y dividimos por 2 obteniendo:}$$

$$H_T = \frac{1}{2g} \omega_2^2 \cdot K' \text{ Despejando } \omega_2:$$

$$\omega_2 = \sqrt{2gH_T} \cdot K_\omega \text{ El valor de } K_\omega \text{ lo provee el fabricante.}$$

Igualmente, de la misma manera si despejáramos c_2 obtendríamos una expresión similar:

$$H_T = \frac{1}{g} u_2^2 \cdot K' \Rightarrow \frac{c_2}{\text{sen}\beta_2} = \frac{u_2}{\text{sen}(\alpha_2 + \beta_2)} \Rightarrow u_2 = \frac{c_2}{\text{sen}\beta_2} \text{sen}(\alpha_2 + \beta_2)$$

$$H_T = \frac{1}{g} \left(\frac{c_2}{\text{sen}\beta_2} \text{sen}(\alpha_2 + \beta_2) \right)^2 \cdot K'$$

$$H_T = \frac{1}{2g} c_2^2 \frac{\text{sen}^2(\alpha_2 + \beta_2)}{\text{sen}^2\beta_2} \cdot 2K'$$

$$H_T = \frac{1}{2g} c_2^2 K'$$

$$c_2 = \sqrt{2gH_T} \cdot K_c$$

Los valores de K_c , K_u y K_o nos permitirán obtener las características principales de la bomba para lo cual aislamos gran parte de los coeficientes que dependen únicamente de la geometría. Si las características geométricas se mantienen constantes entonces los coeficientes no varían, por ser triángulos semejantes, las relaciones funcionales son las mismas.

Estos coeficientes son de suma importancia para las pruebas en laboratorio, las bombas se diseñan a una escala constructiva menor y deben cumplirse las leyes de semejanza geométrica, semejanza cinemática y semejanza dinámica para alcanzar los rendimientos buscados, ambas bombas se pueden extrapolar de modelo a prototipo.

Analizamos nuevamente la expresión:

$$H_T = \frac{1}{g} u_2^2 \cdot K \Rightarrow K : K(\alpha_2; \beta_2) \text{ y recordando además que } u_2 = \pi \cdot d \cdot n$$

$$H_T = \frac{1}{g} (\pi \cdot d \cdot n)^2 \cdot K \Rightarrow \frac{1}{g} \cdot K \cdot \pi^2 \cdot d^2 \cdot n^2 \text{ Llamando } K_H = \frac{1}{g} \cdot K \cdot \pi^2 \text{ nos queda:}$$

$$H_T = K_H \cdot d^2 \cdot n^2$$

$$H_1 = K_{H1} \cdot d_1^2 \cdot n_1^2 \Rightarrow \text{Diseño.}$$

$$H_2 = K_{H2} \cdot d_2^2 \cdot n_2^2 \Rightarrow \text{Real.}$$

Si hacemos que $K_{H1} = K_{H2}$, es decir debe existir semejanza en los triángulos de velocidades. Igualdad geométrica (ángulos iguales), igualdad cinemática (proyección c_{2m}).

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 \cdot \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \text{ Obtenemos la semejanza cinemática.}$$

Recordamos al alumno que los subíndices 1 y 2 hacen referencia a la salida de la bomba, dichos subíndices refieren exclusivamente a la Bomba de diseño y a la Bomba real.

Una vez realizados los cálculos de la bomba de diseño, el valor de la energía H_2 puede obtenerse despejando su valor:

$$H_2 = H_1 \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$$

La velocidad de la bomba de laboratorio es mayor ya que desplaza menor caudal, en el caso real al tratarse caudales mayores la velocidad disminuye.

Cuando desea estudiarse un fenómeno natural, primero debe adimensionalizarse para poder llevarlo a condiciones de laboratorio, los numero adimensionales son los que determinan las características de estos últimos en cuanto a equipos, maquinas y dimensiones. Lo que nos permitirá posteriormente extrapolar los resultados de modelo a prototipo. Un ejemplo específico fueron los números adimensionales calculados para el descenso del hombre a la luna, los ensayos se hicieron en piscinas llevándose proporcionalidades a escala.

Ahora bien el caudal Q viene dado por la expresión:

$Q = \pi \cdot d \cdot b \cdot c_m \Rightarrow$ Como existe una relación lineal entre el ancho y el diámetro,

$$b = k \cdot d$$

$Q = \pi \cdot d \cdot k \cdot d \cdot c \cdot \text{sen} \alpha = \pi \cdot d^2 \cdot k \cdot \text{sen} \alpha \cdot \frac{u \cdot \text{sen} \beta}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$ y sabiendo que $u = \pi \cdot d \cdot n$ agrupando todas las

constantes en k_Q

$$Q = k_Q \cdot d^3 \cdot n \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = k_{Q1} \cdot d_1^3 \cdot n_1 \\ Q_2 = k_{Q2} \cdot d_2^3 \cdot n_2 \end{cases} \text{ Si se cumple que } k_{Q1} = k_{Q2} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3 \cdot \frac{n_1}{n_2}$$

Referencias:

- 1- Recuerde el ejemplo de un patinador sobre hielo, el baile de los cisnes, para aumentar o reducir la velocidad de giro, extiende o encoje los brazos manteniendo el momento angular constante.
- 2- Se recomienda al alumno ver el apartado correspondiente a esta sección en donde se detallan las relaciones integrales para un volumen de control.
- 3- Las bombas comercializadas para uso domestico mayormente utilizan perfiles rectos, es netamente una cuestión económica.

Cavitación.

La cavitación comienza a estudiarse debido a las vibraciones que sufrían las hélices de los submarinos en la Segunda Guerra Mundial, básicamente cuando aumenta la velocidad de rotación de la hélice se generan zonas de bajas presiones, por lo que las partículas cambian de estado, se forman pequeñas esferas en la superficie de la hélice, denominadas cavidades de vapor. Cuando las esferas pasan de una zona de menor presión a una de mayor presión, son impactadas por una partícula que les confiere la forma de toroide, a tal punto que implosionan, formando ondas expansivas de ultrasonido que causan vibraciones y corrosión, además de un bajo rendimiento en la máquina.

La cavitación es el estado que tiene el agua cuando la presión que sostiene la partícula baja, desciende por debajo de la presión de vapor.

Las dos formas por las cuales se genera el vapor son descenso de la temperatura a presión constante, descenso de la presión a temperatura constante.

Cuando se inyecta calor la energía es mayor a las fuerzas moleculares que mantienen unidas a las moléculas de la superficie a tal punto de que, por encima de un determinado valor se rompen y comienzan a desprenderse las partículas del fluido. Un ejemplo claro es la olla de presión.

Si se disminuye la presión de un sistema, la energía que mantiene unidas a las moléculas de la superficie, una vez alcanzada la presión de vapor, se rompen y pasan a la superficie. Ejemplo de cómo las ropas se secan.

Debe existir una superficie de discontinuidad, en un conducto esta superficie la dan las impurezas del agua.

Para que la cavitación tenga lugar debe existir zona de baja presión, discontinuidad en la superficie y una próxima zona de alta presión.

Aplicando Bernoulli entre 0 y 1 en la superficie libre del líquido:

$$\frac{P_{atm}}{\gamma} + z_0 + \frac{c_0^2}{2g} = \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{c_1^2}{2g} + k \frac{c_1^2}{2g}$$

$z_0 = z_1$ Están a la misma altura

$$\frac{c_0^2}{2g} = 0 \text{ Fluido en reposo}$$

$$k \frac{c_1^2}{2g} = 0 \text{ Coeficiente de pérdida local por embocadura.}$$

$$\frac{P_1}{\gamma} = \frac{P_{atm}}{\gamma} - \frac{c_1^2}{2g} - k \frac{c_1^2}{2g}$$

Aplicando Bernoulli entre 1 y e en interior del conducto:

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{c_1^2}{2g} = \frac{P_e}{\gamma} + z_e + \frac{c_e^2}{2g} + J_{1-e}$$

$$h_s = z_e - z_1 \text{ Energía de posición}$$

$$\frac{P_{atm}}{\gamma} = H_{atm} = 1013 \text{HPa Energía de altura}$$

$$J_{0-e} = k \frac{c_1^2}{2g} + J_{1-e}$$

Reemplazando:

$$\frac{P_{atm}}{\gamma} - \frac{c_1^2}{2g} - k \frac{c_1^2}{2g} + z_1 + \frac{c_1^2}{2g} = \frac{P_e}{\gamma} + z_e + \frac{c_e^2}{2g} + J_{1-e}$$

$$\frac{P_{atm}}{\gamma} - \frac{c_1^2}{2g} + \frac{c_1^2}{2g} = \frac{P_e}{\gamma} + z_e - z_1 + \frac{c_e^2}{2g} + J_{1-e} + k \frac{c_1^2}{2g}$$

$$\frac{P_{atm}}{\gamma} - \frac{c_1^2}{2g} + \frac{c_1^2}{2g} = \frac{P_e}{\gamma} + h_s + \frac{c_e^2}{2g} + J_{0-e}$$

$$H_{atm} - \frac{c_1^2}{2g} + \frac{c_1^2}{2g} = \frac{P_e}{\gamma} + h_s + \frac{c_e^2}{2g} + J_{0-e}$$

$$H_{atm} = \frac{P_e}{\gamma} + h_s + \frac{c_e^2}{2g} + J_{0-e}$$

Lo que nos interesa es la presión estática $\frac{P_e}{\gamma}$ energía del sistema antes de la bomba, se va ir gastando presión antes

de entrar a la bomba siempre y cuando $\frac{P_e}{\gamma}$ se mayor que las pérdidas de la bomba J_{1-e} más $k \frac{c_1^2}{2g}$:

$$\frac{P_e}{\gamma} = H_{atm} - h_s - \frac{c_e^2}{2g} - J_{0-e}$$

Recordando que la presión de vapor es:

$$P_v = \rho g h_v = \gamma h_v$$

$$\frac{P_v}{\gamma} = h_v$$

Restando a ambos miembros $\frac{P_v}{\gamma}$:

$$\frac{P_e}{\gamma} - \frac{P_v}{\gamma} = H_{atm} - h_s - \frac{c_e^2}{2g} - J_{0-e} - \frac{P_v}{\gamma}$$

$$\frac{P_e - P_v}{\gamma} = H_{atm} - h_s - h_v - \left(\frac{c_e^2}{2g} + J_{0-e} \right) \text{ Ecuación I}$$

Aplicando Bernoulli entre e y x saliendo de la bomba:

$$\frac{P_e}{\gamma} + z_e + \frac{c_e^2}{2g} = \frac{P_x}{\gamma} + z_x + \frac{c_x^2}{2g} + J_{Interno.Máquina}$$

$$y = z_x - z_e \text{ Energía de posición}$$

$$\Delta h_{Int} = y + J_{Interno.Máquina}$$

Considerando $\alpha_2 = 90^\circ$

$$\frac{c_x^2}{2g} = \frac{\omega_x^2}{2g} - \frac{u_x^2}{2g}$$

Tomando como velocidades agrupadas:

$$k \frac{c^2}{2g} = \frac{\omega_2^2}{2g} - \frac{u_x^2}{2g} - \frac{c_e^2}{2g}$$

Volviendo a la ecuación original:

$$\frac{P_e}{\gamma} + \frac{c_e^2}{2g} = \frac{P_x}{\gamma} + z_x - z_e + \frac{c_x^2}{2g} + J_{Interno.Máquina}$$

$$\frac{P_e}{\gamma} + \frac{c_e^2}{2g} = \frac{P_x}{\gamma} + y + \frac{c_x^2}{2g} = +J_{Interno.Máquina}$$

$$\frac{P_e}{\gamma} + \frac{c_e^2}{2g} = \frac{P_x}{\gamma} + \frac{c_x^2}{2g} + J_{Interno.Máquina} - y$$

$$\frac{P_e}{\gamma} + \frac{c_e^2}{2g} = \frac{P_x}{\gamma} + \frac{c_x^2}{2g} + \Delta h_{Int}$$

$$\frac{P_e}{\gamma} + \frac{c_e^2}{2g} = \frac{P_x}{\gamma} + \frac{\omega_x^2}{2g} - \frac{u_x^2}{2g} + \Delta h_{Int}$$

$$\frac{P_e}{\gamma} + \frac{c_e^2}{2g} = \frac{P_x}{\gamma} + \frac{\omega_x^2}{2g} - \frac{u_x^2}{2g} - \frac{c_e^2}{2g} + \Delta h_{Int}$$

$$\frac{P_e}{\gamma} = \frac{P_x}{\gamma} + k \frac{c^2}{2g} + \Delta h_{int}$$

Restando la presión de vapor ambos miembros $\frac{P_v}{\gamma}$:

$$\frac{P_e}{\gamma} - \frac{P_v}{\gamma} = \frac{P_x}{\gamma} - \frac{P_v}{\gamma} + k \frac{c^2}{2g} + \Delta h_{int}$$

$$\frac{P_e - P_v}{\gamma} = \frac{P_x - P_v}{\gamma} + k \frac{c^2}{2g} + \Delta h_{int} \text{ Ecuación II}$$

Si la presión en este punto se hace igual a la de vapor hay cavitación. Igualando ecuación I y II :

$$H_{atm} - h_s - h_v - \left(\frac{c_e^2}{2g} + J_{0-e} \right) = \frac{P_x - P_v}{\gamma} + k \frac{c^2}{2g} + \Delta h_{int}$$

El término a la izquierda se denomina Altura Neta Positiva de Aspiración *ANPA* :

$$ANPA = H_{atm} - h_s - h_v - \left(\frac{c_e^2}{2g} + J_{0-e} \right)$$

La energía con la que partimos debe ser mayor a la que va a perderse y precisarse en la altura de destino.

La curva de cavitación es provista por el fabricante. A medida que se necesita mayor caudal, la partícula necesita de mayor energía para no cavitarse dentro del rodete. A mayor caudal, si se mantiene constante la sección, aumentan las pérdidas aumenta la energía cinética.

Veremos qué energía tenemos disponible en el sistema.

Para diseñar el análisis de cavitación solo debemos ver el sistema de aspiración no el de impulsión.

Clase 12 hora 01:24

Como consideraciones finales, vimos en forma extendida el apartado de bombas centrífugas.