LA BIBLIA DE SHADOWLIGHT EN:

¿Cómo aprobar análisis 2?

Este PDF contiene:

- ✓ Apuntes de Nacho (1er y 2do Cuatrimestre)
- ✓ Teoria para el Final
- ✓ Tips para los que están en pelotas
- ✓ Sangre y Dolor
- ✓ Seguramente faltas de ortografía y algún que otro error
- ✓ Un índice
- ✓ Más dolor

TIPS antes de empezar:

- Si estas cursando la materia tenéis los apuntes de Nacho (no es lo mismo que ir a clases con él, pero son bastante claros igual y sirven mucho).

- Si osáis rendir el final y más o menos te acordás algo, está la teoría y haces finales y sos Sauron con el anillo.

- Si estas en el fondo del abismo (como yo) y cursaste la materia hace 1000 años (como yo) y no recuerdas ni siquiera como restar manzanas, pero es tu deber rendir el final porque se te vence… este es tu post lince:

  "Agarras te fumas todo el apunte, y después haces finales hasta que se te duerman las piernas de estar sentado, cuando ya estas paralizado lees toda la teoría (armas canciones para que se te queden en la cabeza) y quedaste ciego. Ya no ves ni sentís nada, sos inimputable hermano en 17 días aprobaste análisis 2".

  https://www.youtube.com/watch?v=EnSV7h6Lx4q

Consejo: Si querés aumentar monstruosamente tus chances de aprobar te recomendaría que hagas todos los finales del 2014 2015 y 2016. Los podes buscar en utnianos, en https://analisis2.wordpress.com/ o en Facebook en el grupo de análisis matemático 2. También en fotocopiadora se pueden conseguir los del 14 resueltos y los del 15 16 sin resolver.

ADVERTENCIA: Los resueltos comprados en fotocopiadora tienen algún que otro resultado mal, si los googlean en el hilo de la conversación del final son corregidos.

INDICE

Primer Cuatrimestre	**PAG**
Campos Escalares	11
Cauchy Dini	37
Curva como intersección de dos superficies	31
Derivada direccional	19
Derivadas parciales	16
Diferenciabilidad	26
Ecuaciones diferenciales de orden I	5
Extremos de campos escalares	41
Función Vectorial	9
Gradiente de un campo escalar	17
Limite en varias variables	12
Matriz Jacobiana / Regla de la Cadena	35
Plano Tg a recta normal...	28
Polinomio de Taylor orden 2	40
Recta Tg y Plano normal a una curva	10
Superficie en forma paramétrica	32
Trayectorias ortogonales	7

Segundo Cuatrimestre

Área de la elipse 59

Cambio de variable en una integral doble 55

Circulación de un campo vectorial 45

Coordenadas Cilíndricas 67

Coordenadas Esféricas 68

Coordenadas Polares 57

Ecuaciones diferenciales de orden 2 83

Flujo de un campo vectorial 71

Gauss (Flujo) 74

Green (Circulación/Área) 81

Independencia del camino 47

Integrales de superficie (Área en R3) 61

Línea de campo 86

Longitud de Arco / Integrales Dobles 53

Masa 70

Principio de deformación de contorno 50

Stokes (Rotor) 78

Volumen Integral Triple 64

Teoría 88

Ecuaciones diferenciales de orden I

1- Variables separables: se dice asi cuando se pueden llevar a "X" y a "Y" a distintos lados del igual. Inclusive sus diferenciales.

$$y\,y' = x^3$$

$$y\frac{dy}{dx} = x^3$$

$$\int y\,dy = \int x^3\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{4} + C$$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2} + K}}$$ Solucion General

- Condición Inicial: $y(0) = 8$

$$\sqrt{0+K} = 8$$

$$\boxed{K = 64}$$ Solucion Particular

2- Ecuación lineal de orden 1 tiene la forma $y' + P(x)\,y = Q(x)$

$$y = \underbrace{e^{-\int P\,dx}}_{u} \cdot \underbrace{\left(K + \int e^{\int P\,dx}\,Q\,dx\right)}_{v}$$

$$x y' - y = x^3$$

Divido por x

$$y' - \underbrace{\frac{1}{x}}_{P} y = \underbrace{x^2}_{Q}$$

$$y = e^{-\int -\frac{1}{x}\,dx} \left(K + \int e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} x^2\,dx\right)$$

$$y = e^{\ln x} \left(K + \int e^{-\ln x} x^2\,dx\right)$$

$$y = x \left(K + \int \frac{1}{x} x^2\,dx\right)$$

$$y = x \left(K + \frac{x^2}{2}\right)$$

$$\boxed{y = Kx + \frac{x^3}{2}}$$ Solucion particular

3- Caso particular: ecuacion de orden 2 reducible a orden 1

$$\underbrace{y''}_{g'} + \underbrace{y'}_{g} = \underbrace{6}_{Q}$$ Con $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$

$P = 1$

$$g = e^{-\int dx} \left(K + \int e^{\int dx} 6\,dx\right)$$

$$= e^{-x} \left(K + 6e^{x}\right)$$

$$y' = g = Ke^{-x} + 6$$

$$-y'(0) = K + 6 = 3$$

$$\boxed{K = -3}$$

$$y = \int (Ke^{-x} + 6)\,dx$$

$$y = -Ke^{-x} + 6x + c$$

$$y(0) = 3 + 0 + C = 2 \Rightarrow \boxed{C = -1}$$

$$\boxed{y = 3e^{-x} + 6x - 1}$$ Solucion Particular

NOTA

Trayectorias ortogonales a una familia de curvas

Dada una familia

$-x^2 + y^2 = K$

Hallar sus TO

1- Derivar

$$2x + 2yy' = 0$$

2- $\boxed{y' = -\frac{1}{y'}}$ Por trayectoria ortogonal

$$2x + 2y\left(-\frac{1}{y'}\right) = 0$$

3- Resolver

$$2x = \frac{2y}{y'}$$

$$x = \frac{y}{dy}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = \ln x + c$$

$$\boxed{y = e^{\ln x + C}}$$

Trayectoria ortogonal

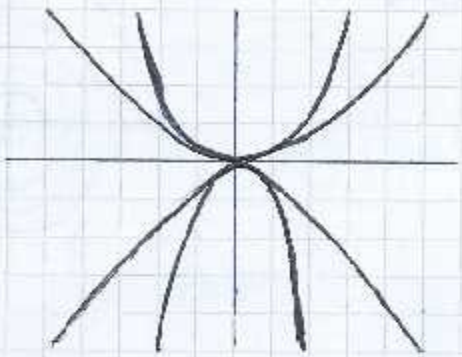
$$y = \frac{e^{\ln x}}{x} \cdot \frac{e^c}{A} = Ax$$

CASO PARTICULAR

Si al derivar permanece la constante K

$y = Kx^2$

$\frac{y}{x^2} = K$



1) $y' = 2Kx$

$y' = 2\frac{y}{x^2}x$

2) $-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x}$ ← Separable

3) $-\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{x}$

$\int -x\,dx = \int 2y\,dy$

$-\frac{x^2}{2} + C = y^2$

TO $\frac{x^2}{2} + y^2 = C$

Clasificacion de las funciones

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{23}$ / F vectorial (curvas)

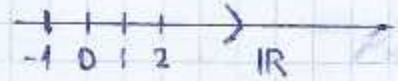
$F: \mathbb{R}^{23} \to \mathbb{R}$ / campo escalar (superficie)

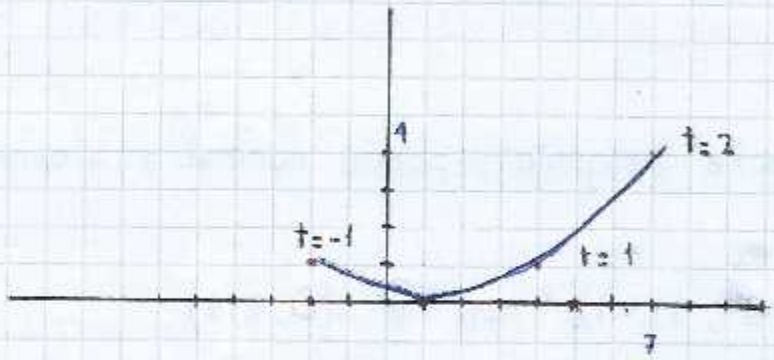
$F: \mathbb{R}^{23} \to \mathbb{R}^{23}$ / campo vectorial

NOTA

Funcion vectorial (Curvas)

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 / F(t) = (3t+1, t^2)$





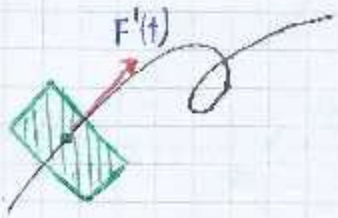
Derivada de una funcion vectorial: se realiza componente por componente y geometricamente es el vector tangente a la curva en un punto dado. **Ejemplo:** Hallar la recta tangente a la curva en el punto $(7,4)$

- $F'(t) = (3, 2t)$

$F'(2) = (3,4)$ → Uso el 2 como punto porque busco en la original que de $(7,4) \Rightarrow \underline{y=2}$

$$Rtg: (x,y) = (7,4) + \lambda(3,4)$$

Recta tg y plano normal a una curva en un punto en $\mathbb{R}^3$



$F'(t)$ ⊥ dir r tg
$\vec{m}$ plano normal

- Ejercicio: Hallar recta tangente y plano normal a la curva

$C: F(t) = (t^2+3t, e^t, 4t+1)$ en $P:(0,1,1)$

- $t=0 \Rightarrow (0,1,1)$

$F'(t) = (2t+3, e^t, 4)$

$F'(t) = (3,1,4)$ ⊥ dir $\vec{n}$

$$r_{tg} = (x,y,z) = (0,1,1) + \lambda(3,1,4)$$

$$\Pi_m = 3x + y + 4z + D = 0$$

Punto regular de una curva

Se dice así cuando la derivada en dicho punto no es el vector nulo

$F' = (0,0,\dots)$

NOTA

Campos Escalares

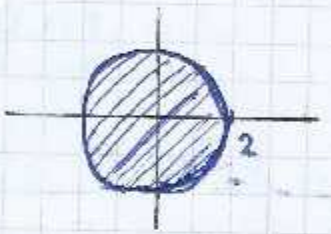
En particular si el dominio esta incluido en $\mathbb{R}^2$ es una superficie

- Dominio, curvas de nivel y grafica de un campo escalar

$F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / \frac{F(x,y)}{z} = \sqrt{4-x^2-y^2}$

- Dominio: $4 - x^2 - y^2 \geq 0$

$x^2 + y^2 \leq 4$



- Curvas de nivel: Se obtienen igualando la función a una constante

- C_0: $\sqrt{4-x^2-y^2} = 0$

  $x^2 + y^2 = 4$

- C_1: $\sqrt{4-x^2-y^2} = 1$

  $x^2 + y^2 = 3$

- C_2: $\sqrt{4-x^2-y^2} = 2$

  $x^2 + y^2 = 0$

  $P(0,0,2)$

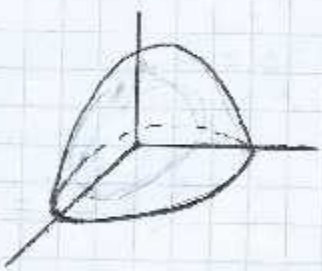
- C_3: $\sqrt{4-x^2-y^2} = 3$

  $4 - x^2 - y^2 = 9$

  $x^2 + y^2 = -5$

  $\nexists$

Grafica



Limite en varias variables

Si por dos caminos el Lim difiere diremos que no existe, si da igual no sabemos

1) Acercamiento por los ejes

Eje X

$\lim_{x \to 0} F(x,0)$

Eje Y

$\lim_{y \to 0} F(0,y)$

$\neq$ — $\nexists$ Lim

Ejercicio: $\frac{3x+2y}{x+y}$

- eje x

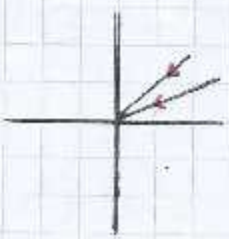
$\lim_{x \to 0} \frac{3x}{x} = 3$

- eje y

$\lim_{y \to 0} \frac{2y}{y} = 2$

$3 \neq 2 \Rightarrow \nexists$ Lim

2) Acercamiento por rectas



$y = mx$

Ejercicio: $\frac{xy}{x^2+y^4}$

Por ejes da $0 = 0$ entonces prueba por rectas

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\, mx}{x^2 + m^4 x^4} = \frac{x^2\, m}{x^2(1+m^4x^2)} = \boxed{m}$$

Si el resultado del lim depende de m, no existe el Lim. En cambio si coincide con criterio 1 no sabemos.

- Si criterio 1 y 2 iguales, usar 3a o 3b

3a) 0 x Acotado = 0 (Existe Lim)

- Lista de Acotados - $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ ← =0 + chico

- $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

- $\frac{y^6}{x^{10}+y^6}$

Ejercicio: $\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{x\, y^2}{x^2+y^2}$ (0 · Acotado)

Criterio 1 y 2 dan 0 pero ...

$\exists \lim = 0$

3B) Newton Kramer

Se utiliza cuando los criterios 1 y 2 dan el mismo limite y no hay acotado.

Se busca una curva que pase por (0,0) el punto a que se tiende y que el limite de distinto a los anteriores.

Una forma de buscar una curva es hacer que los grados sean iguales

Ejercicio

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{y^2+x}$$

1) eje $x \to 0$ 2) $y = mx \to 0$ 3a) ~~AGT~~

eje $y \to 0$

3b- $\boxed{y^2 = -x^2 + x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x+(-x+x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \neq 0$$

~~$\exists$~~ Lim

- Otro modo de elegir una curva es igualar la función a una constante distinta de 0

$$\frac{x^2}{x+y^2} = 1$$

$$x^2 = x + y^2$$

$$\boxed{C: -x + x^2 = y^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}} \frac{\overbrace{(x-3)}^{z}\overbrace{(y-2)}^{w}}{(x-3)^2+(y-2)^2} = \lim_{\substack{z\to 0\\ w\to 0}} \frac{z\,w}{z^2+w^2}$$

Continuidad

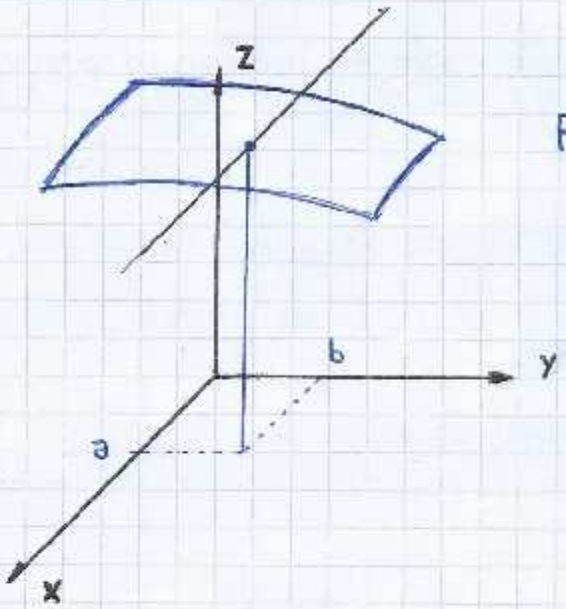
Analizar continuidad en el origen para la función

$$F(x,y) \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & x,y \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{x\cdot x^2}{x^2+y^2} + \frac{y\cdot y^2}{x^2+y^2} = 0+0 = 0 \Rightarrow F(0,0)$$

$\longrightarrow$ F es continua

Derivadas parciales por definición



$F(x,y) = Z$

$$F'x = (a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{F(a+h,b) - F(a,b)}{h} \neq \infty$$

$$F'y = (a,b) = \lim_{k \to 0} \frac{F(a,b+k) - F(a,b)}{k} \neq \infty$$

Geometricamente $F'x$ es la pendiente de la recta tangente a la superficie, estando dicha recta incluida en un plano paralelo al x,z. Analogo en el (y,z)

Ejercicio

$F(x,y) = x^2y + 3x + 2y$

Calcular $F'x\ (2,1)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(2+h,1) - F(2,1)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 + 3(2+h) + 2 - 12}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 6 + 3h + 2 - 12}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h\,(4 + h + 3)}{h} = \boxed{7}$$

Derivada parcial por regla

Para derivar respecto a una variable considerar a las demas como constantes

$F'x\,(x,y) = 2xy + 3$

$F'y\,(x,y) = x^2 + 2$

Usando datos del ejercicio anterior

Gradiente de un campo escalar

Es el vector formado por las derivadas parciales

$\nabla F\,(x, y, \dots) = (F'x, F'y, \dots)$

$\nabla F\,(x,y) = (2xy + 3, x^2 + 2)$

- Solo seguimos utilizando la definicion si la funcion es partida

Ejercicios

Hallar ∇ campo $F(x,y,z) = e^{xy} + z^3$

$R^4 \quad \nabla F(x,y,z) = (e^{xy}.y, e^{xy}x, 3z^2)$

Analizar continuidad y derivada parcial para el origen en la función.

$$F(x,y) \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} & x,y \neq 0,0 \\ 0 & x,y = 0,0 \end{cases}$$

- Continuidad en $(0,0)$

Acercamiento por ejes

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to 0} & \frac{x}{x^2} = \infty \\ \lim\limits_{y\to 0} & \frac{0}{y^2} = 0 \end{array}\right\} \neq$$

$\nexists \lim$

$$F'x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(0+h,a) - F(0,0)}{h}$$

$$\frac{\frac{h}{h^2} - 0}{h} = \frac{1}{h^2} = \infty$$

$\nexists \; F'x(0,0)$

$$F'y(0,0) = \lim_{K\to 0} \frac{F(0,0+K) - F(0,0)}{K}$$

$$\lim_{K\to 0} \frac{\frac{0}{K^2} - 0}{K} = 0$$

- NO HAY RELACION ENTRE CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

Función Clase 1. $F \in C^1 \rightarrow Fx'$; $F'y$ son continuas

Derivada Direccional

Además de la función y del punto, requerimos un versor que nos de la dirección de derivación

$$F'((a,b),\bar{v}) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{F(a+\lambda u, b+\lambda v) - F(a,b)}{\lambda} \neq \infty$$

Calcular $F(x,y) = xy + 3x$

$$F'\left((2,1)\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\right)$$

Si te dan la dirección tenes que versorizarla $\sqrt{x^2+y^2} \leq Z$

$F(x,y) = xy + 3x$

$$F'((2,1)\left(\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5}\right) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F\left(2+\frac{3}{5}\lambda, 1+\frac{4}{5}\lambda\right) - F(2,1)}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\left(2+\frac{3}{5}\lambda\right)\left(1+\frac{4}{5}\lambda\right) + 3\left(2+\frac{3}{5}\lambda\right) - 8}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{2 + \frac{11}{5}\lambda + \frac{12}{25}\lambda^2 + 6 + \frac{9}{5}\lambda - 8}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda\left(\frac{11}{5} + \frac{12}{25}\lambda + \frac{9}{5}\right)}{\lambda}$$

$$= 4$$

Derivada direccional por regla

$$\nabla_F (x,y) = (y+3, x)$$

$$\nabla F (2,1) = (4,2)$$

$$(4,2)\left(\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5}\right) =$$

$$= \frac{12}{5} + \frac{8}{5} = 4$$

F $d_F \rightarrow$ $F'((a,b),\vec{v}) = \nabla F((a,b),\vec{v})$

- Solo seguiremos utilizando la definicion de derivada direccional si la funcion es partida

Tener en cuenta que de la ultima formula se deduce que las derivadas parciales son casos particulares de la direccional cuando los versores canonicos

Ejercicio

Analizar derivabilidad en distintas direcciones en el origen para la funcion

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & x,y \neq 0,0 \\ 0 & x,y = 0,0 \end{cases}$$

$$F'((0,0)\ (u,v)) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(0+\lambda u, 0+\lambda v) - F(0,0)}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\dfrac{\lambda^2 u^2}{\lambda^2 u^2 + \lambda^2 v^2} - 0}{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda^2 u^2}{\lambda \lambda^2 (u^2+v^2)} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{u^2}{\lambda} \begin{cases} \infty \text{ si } u \neq 0 \ \nexists \\ 0 \text{ si } u = 0 \ \exists \end{cases}$$

$u^2 + v^2 = 1$

$v^2 = 1$

$v = \pm 1$

F es derv en (0,0) para $\bar{v} = (0, \pm 1)$

- $\lim_{\lambda \to 0} \frac{uv}{\lambda}$ $u = 0$ o $v = 0$

- $\lim_{\lambda \to 0} u^2 + v$ $\exists \forall$ direcciones

- $\lim_{\lambda \to 0} \lambda u v = 0$ $\exists \forall$ direcciones

2) $F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 - y^2} & x^2 - y^2 \neq 0 \\ 3x + 2y & x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

$$F'((0,0),(u,v)) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(0+\lambda u, 0+\lambda v) - F(0,0)}{\lambda}$$

$u^2 - v^2 \neq 0$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{\lambda^2 u^2}{\lambda^2 u^2 - \lambda^2 v^2} - 0}{\lambda} =$$

$$\frac{\lambda^2 u^2}{\lambda \lambda^2 (u^2 - v^2)}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{u^2}{(u^2 - v^2)\lambda}$$

$u = 0 \rightarrow v = \pm 1$

$\bar{v} = (0, \pm 1)$

$$U^2 - V^2 = 0$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{3\lambda U + 2\lambda V - 0}{\lambda}$$

$$= 3U + 2V$$

$\forall$ direccion

$$\begin{cases} U^2 - V^2 = 0 \rightarrow U^2 = V^2 \\ U^2 + V^2 = 1 \end{cases}$$

$$2U^2 = 1$$

$$U = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = V$$

$$\vec{v} = \left(\begin{matrix} + \\ + \\ - \end{matrix} \sqrt{\frac{1}{2}}, \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \sqrt{\frac{1}{2}} \right)$$

Derivada direccional MAX, MIN o NULA

Dada $F(x,y)$ y un punto de la misma deseamos hallar 2 versores para los cuales la pendiente es MAX, MIN o NULA

$$F'((a,b),(u,v)) = \nabla F(a,b) \cdot \vec{v} = |\nabla F(a,b)|\,|\vec{v}| \cos\alpha$$

MAX $\alpha = 0 \rightarrow V_{max} \frac{\nabla F(a,b)}{|\nabla F(a,b)|}$ $\quad F'_{max} = |\nabla F(a,b)|$

MIN $\alpha = \pi \rightarrow V_{min} \frac{-\nabla F(a,b)}{|\nabla F(a,b)|}$ $\quad F'_{min} = -|\nabla F(a,b)|$

NULA $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \rightarrow \vec{v} \perp \nabla F(a,b)$ $\quad F'_{nula} = 0$

Ejercicio

Hallar direccion y derivada MAX, MIN y NULA para la funcion $F(x,y) = x^2y$ en el punto $(2,1)$

$$\nabla F(x,y) = (2xy, x^2)$$
$$\nabla F(2,1) = (4,4)$$

$$\bar{V}_{max} = \frac{(4,4)}{\sqrt{32}} \qquad F'_{MAX} = \sqrt{32}$$

$$\bar{V}_{min} = -\frac{(4,4)}{\sqrt{32}} \qquad F'_{MIN} = -\sqrt{32}$$

$V_{nulo} \perp (4,4)$

$$V_0 = \frac{(-4,4)}{\sqrt{32}} \qquad V_0 = \frac{(4,-4)}{\sqrt{32}}$$

Hallar el versor maximo en el origen para la función

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & x,y \neq 0,0 \\ 0 & x,y = 0,0 \end{cases}$$

$$F'(0,0)(u,v) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(0+\lambda u, 0+\lambda v) - F(0,0)}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{\lambda u \cdot \lambda^2 v^2}{\lambda^2 u^2 + \lambda^2 v^2} - 0}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda^3 u v^2}{\lambda^3 (u^2+v^2)}$$ 1x versor

$\rightarrow = u.v^2$ $\vec{v}$ es max?

$= u.(1-u^2)$

$g(u) = u - v^3$

$g' = 1 - 3u^2 = 0$

$u^3 = 1/3$

$u = \pm\sqrt{1/3}$

$g'' = -6u$

$g''(\sqrt{1/3}) < 0$ $\quad$ $g''(-\sqrt{1/3}) > 0$

MAX $\quad$ MIN

$u^2 + v^2 = 1$

$v^2 = 1 - u^2$

$v^2 = 2/3$

$v = \pm\sqrt{2/3}$

$\vec{v}_{MAX}$

$(\sqrt{1/3}, \pm\sqrt{2/3})$

Diferenciabilidad (Existencia de plano tg)

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{F(a+h,b+k)-F(a,b)-hF'_x(a,b)-kF'_y(a,b)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

1) F no es continua → F no es diferenciable

2) $\nexists$ F_x' o F_y' o direccion → F no es diferenciable

3) F es continua y derivable $\forall$ dirección:

- 3.1 - Si $\left.\begin{array}{l} F' = uv \\ F' = u^2 \\ F' = u^3+v^2 \end{array}\right\}$ No lineal → No diferencial

- 3.2 - Si $\exists$ 2 $\bar{v}$ max o 2 $\bar{v}$ min o 3 nulos → No diferencial

- 3.3 - F e C^1 → F es dif

Analizar diferenciabilidad en el origen para la funcion

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & xy \neq 0,0 \\ 0 & xy = 0,0 \end{cases}$$

- Continuidad en (0, 0)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\overset{0}{x}\,\overset{\text{Acot}}{y^2}}{x^2+y^2} = 0 = F(0,0)$$

$\boxed{\text{F es continua}}$ (en 0,0)

- Derivable

$$F'((0,0)(u,v)) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{F(0+\lambda u, 0+\lambda v) - F(0,0)}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{\lambda u \cdot \lambda^2 v^2}{\lambda^2 u^2 + \lambda^2 v^2} - 0}{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda^3 u v^2}{\lambda^2 (u^2+v^2)} = u v^2 \rightarrow$$ No es Lineal

F no dif en (0,0)

$\nexists$ plano tg en (0,0,0)

$\exists$ $\forall$ direccion

Prueba de otra forma

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ K \to 0}} \frac{F(0+h, 0+K) - F(0,0) - h0 - K0)}{\sqrt{h^2+K^2}} =$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ K \to 0}} \frac{K^2 h}{(h^2+K^2)\sqrt{h^2+K^2}} = ?$$

- $K = m.x \rightarrow$ Metodo de la pendiente

$$\lim_{h \to 0} \frac{m^2 h^2 . h}{(h^2+m^2h^2)\sqrt{h^2+m^2h^2}}$$

$$\pm \frac{m^2}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}$$

$\nexists$ Lim $\rightarrow$ F no diferencial (0,0)

Tip

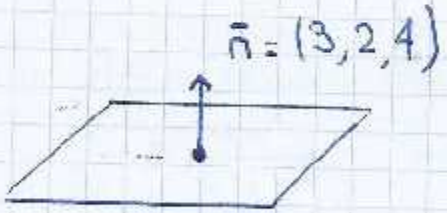
$\frac{x\,y^2}{x^2+y^2}$ grado 3 / grado 2 $\ominus \rightarrow 1$ $\xrightarrow{\text{no dif}}$ mh

$\frac{x^2\,y^2}{x^2+y^2}$ gr 4 / gr 2 $\ominus \rightarrow 2$ $\xrightarrow{\text{dif}}$ 0 × acotado

$\frac{\sqrt{x^3\,y^2}}{x^2+y^2}$ gr 3,5 / gr 2 $\ominus \longrightarrow 1{,}5$ $\xrightarrow{\text{dif}}$ 0 × acotado

- Funciones del tipo polinomial, exponencial, logaritmica, trigonometrica son diferentes en todo punto de su dominio por ser clase 1.

Plano tg a recta normal a una superficie diferencial en 1 punto.



$\Pi: 3x + 2y + 4z = 0$

$\nabla_F(3,2,4) \Rightarrow \nabla_F = \vec{n}$

- Prop del grad: es ortogonal a la superficie

$\nabla_F \longrightarrow$ dir recta normal

$\rightarrow \vec{n}$ plano tg

Dada la superficie $S: x^3z + y^2 = 9$ hallar π tg y recta normal en $P: (2,1,1)$

$\nabla_F (x,y,z) = (3x^2z, 2y, x^3)$

$\nabla_F (2,1,1) = (12, 2, 8)$ → dir → $\vec{n}$

$Rn: (x,y,z) = (2,1,1) + \lambda (12,2,8)$

$\pi tg: 12x + 2y + 8z + D = 0$

Reemplazo punto y saco D

- Caso particular: Si la superficie viene en forma explicita o sea $z = F(x,y)$ la tercer componente de la normal es -1

Ejemplo

$F(x,Y) = x^3 y^2$

$\nabla F(x,y) = (3x^2y^2, 2x^3y)$

Implicita ⇒ $x^3y^2 - z = 0$

$\vec{n} = (3x^2y^2, 2x^3, y, -1)$

Hallar los puntos de la superficie $S: x^2+y^2+z^2=9$ en donde el plano tg es paralelo a $\pi: 4x+4y+2z=0$

Paralelo implica que $K\bar{n}_\pi = \bar{n}_S$ es lo mismo donde vaya la K

$\bar{n}_\pi = (4,4,2)$

$\bar{n}_S = \nabla S$

$\nabla S = (2x, 2y, 2z)$

$K(4,4,2) = (2x, 2y, 2z)$

$$\begin{cases} 4K = 2x \Rightarrow 2K = x \\ 4K = 2y \Rightarrow 2K = y \\ 2K = 2z \Rightarrow K = z \end{cases}$$

Reemplazo en la superficie

$2k^2+2k^2+k^2=9$

$9k^2 = 9$

$\boxed{K = \pm 1}$

Lo cual significa que hay 2 puntos

$P: (2,2,1)$

$Q: (-2,-2,-1)$

NOTA

Curva como intersección de dos superficies

$$C \begin{cases} z = x^2 + y \\ z = 3x + 2y - 3 \end{cases}$$

Hallar su recta tg en el punto $(1,1,2)$

1) Parametrizo C

$x = t$ → tomo la más difícil

$$\begin{cases} z = t^2 + y \\ z = 3t + 2y - 3 \end{cases}$$

$$t^2 + y = 3t + 2y - 3$$

$$\boxed{y = t^2 - 3t + 3}$$

$$z = t^2 + t^2 - 3t + 3$$

$$\boxed{z = 2t^2 - 3t + 3}$$

$$C: \; p(t): \left(\underset{1}{t}, \underset{1}{t^2 - 3t + 3}, \underset{2}{2t^2 - 3t + 3} \right)$$

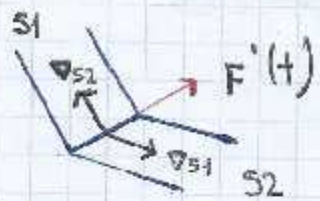
$t = 1$

$$p'(t) = (1, 2t - 3, 4t - 3)$$

$$p'(1) = (1, -1, 1)$$

$$\boxed{R_{tg} = (x,y,z) = (1,1,2) + \lambda (1,-1,1)}$$

2) Usando ∇_{S1}, ∇_{S2}



$$\nabla_{S1} \times \nabla_{S2} = F'(t)$$

$\nabla_{S1} = (2x, 1, -1)$

$\nabla_{S2} = (3, 2, -1)$

$\nabla_{S1} = (1, 1, 2) = (2, 1, -1)$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1)$$

Superficie en forma parametrica

Dada la superficie en forma parametrica $S: F(u,v) = \left(\frac{u}{3}, uv, u^3 v\right)$ hallar su plano tg en el punto $(1, 6, 11)$

1) Desparametrizar (volver a cartesiana)

$u/3 = x$

$u = 3x$

$y = 3x \cdot v$

$z = (3x)^2 + v \rightarrow z - 9x^2 = v$

$y = 3x\,(z - 9x^2)$

$$S: 3xz - 27x^3 - y = 0$$

$\nabla s = (3z - 81x^2, -1, 3x)$

$\nabla s = (-48, -1, 3) = \bar{n}$ para $(1,6,11)$

$\bar{\pi} tg = -48x - y + 3z + D = 0$

Ejercicio: $F(u,v) = \left(\frac{u}{3}, u.v, u^2+v\right)$ → plano tangente $(1,6,11)$

$u = 3, \ v = 2$

$F'u = \left(\frac{1}{3}, v, 2u\right)$
$F'v = (0, u, 1)$] ■ $\bar{n}$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \left(16, -\frac{1}{3}, 1\right) = \bar{n}$$

$F'u \times F'v$ se denomina producto vectorial fundamental y si diera $(0,0,0)$ el punto se dice no regular para dicha superficie, lo cual es equivalente a decir no diferenciable.

Formula de aproximación por el diferenciable (Aproximación por el plano tangente).

$$F(a+h, b+K) = F(a,b) + \nabla F(a,b)(h,K)$$

- $F(x,y) = x^2 y$

Aproximar $F(2,1 ; 3,2)$

$(a,b) = (2,3)$

$(h,K) = (0,1 ; 0,2)$

$\nabla F = (2xy, x^2)$

$Aprox = F(2,3) + \nabla F(2,3)(0,1 ; 0,2)$

$= 12 + (12,4)(0,1 , 0,2)$

$\boxed{= 14}$

Aproximar por el diferencial

$1,3^{4,2} + 1,3^2 + 4,2^3$

$F(x,y) = x^y + x^2 + y^3$

$(a,b) = (1,4)$

$(h,k) = (0,3 ; 0,2)$

$\nabla F.(x,y) = (y.x^{y-1} + 2x , x^y \ln x + 3y^2)$

$= F(1,4) + \nabla_F (1,4).(0,3 , 0,2)$

$= 66 + (6,46)(0,3 , 0,2)$

$\boxed{= 77,4}$

Matriz Jacobiana de un campo vectorial

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \;/\; F(x,y,z) = (xy^2+z,\ xz^3+y)$

$$D_F = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy & 1 \\ 2^3 & 1 & 3xz^2 \end{pmatrix}$$

Se construye colocando en una de sus filas el ∇ de c/componente

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;/\; F(x,y) = x^3y$

$$\nabla F(x,y) = (3x^2y,\ x^3) = DF$$

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \;/\; F(t) = (t^2, t^3)$

$$D_F = F' = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

Derivada de la función compuesta (Regla de la cadena en forma matricial)

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;/\; F(u,v) = u.v \;/\; \nabla F$

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \;/\; g(x,y,z) = (xy+z,\ x^3y) \;/\; Dg$

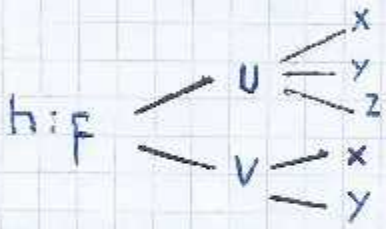
$h = F \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \;/\; \nabla h$

$$\nabla h = \nabla_F (u,v)\ Dg(x,y,z)$$

$$\nabla h = (v\ u) \begin{pmatrix} y & x & 1 \\ 3x^2y & x^3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla h : (x,y,z) = \left(\underbrace{vy + u3x^2y}_{h'x},\ \underbrace{vx + ux^3}_{h'y},\ \underbrace{v + u}_{h'z} \right)$$

Otra forma de la regla de la cadena es considerando el siguiente diagrama



$$h'x\,(x,y,z) = F'u\,(u,v)\ u'x\,(x,y,z) + F'v\,(u,v)\ v'x\,(x,y,z)$$

$$h'y = F'u \cdot u'y + F'u \cdot v'y$$

$$h'z = F'u \cdot u'z$$

Esto último se utiliza cuando el resultado final es un ∇ y no una matriz jacobiana.

Por ejemplo: compuesta + implícita

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \ / \ F(x,y,z) = xy + z^2 \ / \ \nabla F$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \ / \ g(t) = (t^2, t) \ / \ g'(t)$$

$$h : g \circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ / \ Dh$$

$Dh = g'(t)\ \nabla F$

$Dh(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} (y \ x \ 2z)$

$Dh(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2ty & 2tx & 4tz \\ y & x & 2z \end{pmatrix}$

Derivada de La funcion implicita (Cauchy - Dini)

$F(x,y,z) = xz^3 + e^{y-z} = 4$ ($z(x,y)$)

$z'x$? $z'y$?

$F \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow x \\ \leftarrow y \end{matrix} \Rightarrow F'x + F'z \cdot z'x = 0$

$z'x(x,y) = -\frac{F'x}{F'z}(x,y,z) = \frac{-z^3}{3xz^2 - e^{y-z}}$

$z'y(x,y) = -\frac{F'y}{F'z} = \frac{-e^{y-z}}{3xz^2 - e^{y-z}}$

$z(3,1)$? $\Rightarrow xz^3 + e^{y-z} = 4$

$\boxed{z = 1}$

$z'x(3,1) = -\frac{1}{8} \quad z'y(3,1) = -\frac{1}{8}$

$\boxed{\nabla z\ (3,1) = \left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)}$

Hipotesis del Teorema

1. $F(3,1,1) = 4$

2. F diferenciable $(3,1,1)$ por C^1

3. $F'_z(3,1,1) = 8 \neq 0$

Ejercicio

Sean las funciones "$f(u,v) = u.v + 4$", "$u = xy + 8$" y v definida implicitamente por $xv^3 + yv^5 = 3$

Resulta $f(u,v) = h(x,y)$

Calcular $\nabla h(\underset{x}{2},\underset{y}{1})$

$$h : f \begin{cases} u \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ v \begin{cases} x \\ y \end{cases} \end{cases}$$

$F'u = V$

$F'v = U$

$U'x = Y$

$U'y = X$

$$V'x = -\frac{F'x}{F'v} = \frac{-v^5}{3xv^2 + 5yv^4}$$

$$V'y = -\frac{F'y}{F'v} = \text{" "}$$

Saco con el punto uv

$h'x(x,y) = F'u(u.v) \cdot u'x(x,y) + F'v(u,v) \cdot v'x(x,y)$

$h'y(x,y) = F'u \cdot u'y + F'u \cdot v'y$

$$h'x = vy + u\left(\frac{-v^5}{3xv^2 + 5yv^4}\right) \rightarrow h'x(2,1) = 1,1 + 10\left(-\frac{1}{11}\right)$$

$$h'y = vx + v\left(\frac{-v^5}{3xv^2 + 5yv^4}\right) \rightarrow h'y(2,1) = 1,2 + 10\left(-\frac{1}{11}\right)$$

$$\nabla h(2,1) = \left(\frac{1}{11}; \frac{12}{11}\right)$$

Luego aproximar por el diferencial $h(2,3 ; 1,4)$

$$h(2,3 ; 1,4) = h(2,1) + \nabla h(2,1)(0,3 ; 0,4)$$

$$= 14 + \left(\frac{1}{11}, \frac{12}{11}\right)(0,3 ; 0,4)$$

$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tiene plano tangente $3x + 12y - 3z = 0$ en $P(2,1,C)$

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / Dg(8,5) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ con $g(8,5) = (2,1)$

Sea $h = F \circ g$ / $\nabla h(8,5)$?

$\%3$

$1X + 4Y - Z = 0$

$\nabla_F(2,1) = (1,4)$

$\nabla h = \nabla_F Dg$

$\nabla h(8,5) = \nabla_F(2,1)\, Dg(8,5)$

$$(1,4)\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla h(8,5) = (25 ; 32)$$

• Polinomio de Taylor de orden 2

Sea FC^2 en (a,b)

$$P(x,y) = \frac{F(a,b) + F'x(a,b)(x-a) + Fy'(a,b)(y-b)}{1!} + \frac{F''(xx)(a,b)(x-a)^2 + 2F''(xy)(a-b)(y-b) + F''yy(a,b)(y-b)^2}{2!}$$

• Hallar el Taylor de orden 2

$F(x,y) = x^2y$ $\qquad F(1,2) = 2$

$(a,b) = (1,2) \longleftarrow$ centro

$F'x = 2xy$	$F'x(1,2) = 4$
$F'y = x^2$	$F'y(1,2) = 1$
$F''xx = 2y$	$F''xx(1,2) = 4$
$F''xy = 2x$	$F''xy(1,2) = 2$
$F''yy = 0$	$F''yy(1,2) = 0$

$$P(x,y) = 2 + 4(x-1) + (y-2) + \frac{4(x-1)^2 + 2.2(x-1)(y-2)}{2!}$$

$$P(x,y) = 2 + 4x - 4 + y - 2 + 2x^2 - 4x + 2 + 2xy - 4x - 2y + 4$$

$$P(x,y) = 2 - 4x - y + 2x^2 + 2xy \approx x^2y = F(x,y)$$

Tener en cuenta que $F(x,y)$ y $P(x,y)$ coinciden en el centro (A,B) hasta sus derivadas segundas inclusive

Extremos de campos escalares

Máximo Local

Mínimo Local

- Condición necesaria de extremo

$$\begin{cases} F'x = 0 \\ F'y = 0 \end{cases} \rightarrow P \text{ críticos}$$

- Condición suficiente : Hessiano

$$H_F \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}$$

- $+$ —— F''_{xx} — $-$ MAX, $+$ MIN
- $-$ Silla
- 0 Usar definición

$F(x,y) = x^2y - xy$. Clasificar extremos del campo escalar

$$\begin{cases} F'x = 2xy - y = 0 \\ F'y = x^2 - x = 0 \end{cases}$$

$F''xx = 2y$

$F''xy = 2x - 1$

$F''yy = 0$

$x = 0$	$x = 1$
$-y = 0$	$2y - y = 0$
$y = 0$	$y = 0$
$P(0,0)$	$Q(1,0)$

$$H_F = \begin{vmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 0 \end{vmatrix} \qquad H_F{}_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

F posee en $(0,0; F(0,0)$ un punto silla

$$H_F(1,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

F posee en $(0,0; F(0,0)$ un punto silla

Analizar extremos en $F(x,y) = x^2 + y^2$

$$\left.\begin{aligned} Fx' &= 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ Fy' &= 2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{aligned}\right\} P: (0,0)$$

$$H_F = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad H_F(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \rightarrow (+) \Rightarrow \text{mínimo local en } (0,0)$$

$F(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $F(0,0) = 0 \Rightarrow (0,0,0)$ mínimo absoluto

Analizar extremos en $x^4 + y^2$

$$\left.\begin{aligned} F'x &= 4x^3 = 0 \rightarrow x = 0 \\ F'y &= 2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{aligned}\right\} P: (0,0)$$

NOTA

$$H_F = \begin{vmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$H_F(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ?$$

$F = x^4 + y^2 \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $F(0,0) = 0 \rightarrow (0,0,0)$ mínimo absoluto

Analizar extremos en $F(x,y) = x^3 + y^2$

$$\left.\begin{aligned} F'x &= 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ F'y &= 2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{aligned}\right\} P:(0,0)$$

$$H_F = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow H_F(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0\ ?$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Eje Y} \quad F(0,y) = y^2 \geq 0 \\ &\text{Eje X}^{\ominus} \quad F(x^{\ominus},0) = x^3 \leq 0 \end{aligned}\right\} \text{Punto silla}$$

$F(x,y,z) = x^2z + y^2 + 4$ extremos en $\pi: 2+x+y=z$

$$F(x,y) = x^2(2+x+y) + y^2 + 4$$
$$= 2x^2 + x^3 + x^2y + y^2 + 4$$

$$F'x = 4x + 3x^2 + 2xy = 0$$
$$F'y = x^2 + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{x^2}{2}$$

$$4x + 3x^2 + 2x\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$
$$4x + 3x^2 - x^3 = 0$$
$$x(4 + 3x - x^2) = 0$$

$x = 0$	$x = -1$	$x = 4$
$y = 0$	$y = -\frac{1}{2}$	$y = -8$

$$H_F = \begin{vmatrix} 4+6x+2y & 2x \\ 2x & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow H_F(0,0) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0 \rightarrow \text{Mínimo}$$

Circulación de campo vectorial sobre una curva (Trabajo o integral de Linea)

Dado un campo vectorial en R2 o R3 y una curva en R2 o R3 respectiva.

$$F(x,y) = \underset{P(x,y)}{(x,y}\ ;\ \underset{Q(x,y)}{x^2})$$

$C: y = x^2 \longrightarrow \begin{cases} x = t & dx = dt \\ y = t^2 & dy = 2t\,dt \end{cases}$

$(0,0) \to (3,9)$

$0 \le t \le 3$

$$\int_C F\,ds = \int_C (P,Q)(dx,dy) = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

$$= \int_C xy\,dx + x^2\,dy$$

En esta ultima se sustituye La curva en forma parametrica

$$= \int_0^3 t\,t^2\,dt + t^2\,2t\,dt$$

$$= \frac{3}{4}\,t^4\Big/_0^3 = \frac{243}{4}$$

Calcular circulación del campo

$P(x,y,z) = (Y, 4, Z^2)$ — P(x,y,z) Q R

$$C: \begin{cases} z = (x^2 + y^2) \\ z = 18 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$\oint_C F\,dg = \int_c P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$= \int_c Y\,dx + 4\,dy + Z^2\,dz$$

- PARAMETRIZO (Igualo Z)

$$x^2 + y^2 = 18 - x^2 - y^2$$

$$2(x^2 + y^2) = 18$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\operatorname{sen} t \\ z = 9 \end{cases} \qquad \begin{aligned} dx &= -3\operatorname{sen} t\,dt \\ dy &= 3\cos t\,dt \\ dz &= 0 \end{aligned}$$

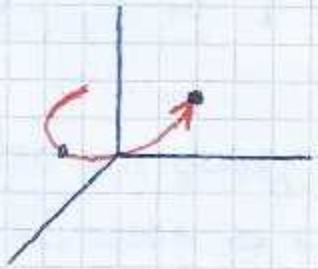
$$0 \le t \le 2\pi$$

$$= \int_0^{2\pi} (-9\operatorname{sen}^2 t + 12\cos t)\,dt = -9\left(\frac{t - \operatorname{sen} t\cos t}{2}\right) + 12\operatorname{sen} t \Big|_0^{2\pi}$$

Luego indicar en la grafica $= -9\pi$ el sentido de circulación de la curva dado por la parametrización

$t = 0 \Rightarrow (3,0,9)$

$t = \pi/2 \Rightarrow (0,3,9)$



Independencia del camino en una integral de linea (Teoria)

$F(x,y) = (3x^2y + 2x,\ x^3)$

C1 $y = x$

$(0,0) \to (1,1)$

$x = t \quad dx = dt$

$y = t \quad dy = dt$

$0 \le t \le 1$

$$\int_{C1} (3x^2y + 2y)\,dx + x^3\,dy$$

$$= \int_0^1 (3t^3 + 2t + t^3)\,dt$$

$$= t^4 + t^2 \Big|_0^1 = 2$$

C2 $y = x^2$

$(0,0) \to (1,1)$

$x = t \quad dx = dt$

$y = t^2 \quad dy = 2t\,dt$

$0 \le t \le 1$

$$\int_{C2} (3x^2y + 2y)\,dx + x^3\,dy$$

$$= \int_0^1 (3t^4 + 2t + t^3 \cdot 2t)\,dt$$

$$= t^5 + t^2 \Big|_0^1 = 2$$

$$= D_F(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy+2 & 3x^2 \\ 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$ Simetrica

Si la matriz jacobiana del campo vectorial es simetrica, La integral de linea es independiente del camino y el campo se dice consertivo o de gradiente, y en dicho caso existe la llamada fn potencial f que cumple $\nabla f = F$

$$\nabla f = F$$

$$(f'_x, f'_y) = (P, Q)$$

$$f = \int P\,dx = \int (3x^2y + 2x)\,dx = x^3y + x^2 + \alpha(y)$$

$$f = \int Q\,dy = \int x^3\,dy = x^3y + B(x)$$

$$\boxed{f(x,y) = x^3y + x^2}$$

$$\int_C F\,ds = f\Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = f(1,1) - f(0,0)$$
$$= 1\,1 + 1^2 - 0 = 2$$

$$\boxed{\int_F ds = f_B - f_A \quad C: A \to B}$$

$$F''_{xy} = F''_{yx}$$

De La ultima formula se deduce que si

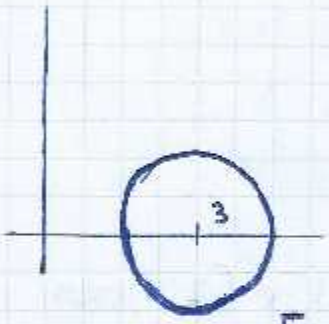
1) Matriz Jacobiana Simetrica
2) Curva cerrada
3) Recinto interior a la curva simplemente conexo

NOTA

Entonces la circulacion es nula

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \longrightarrow D_F \begin{pmatrix} P'_x & \frac{-x^2-y^2+y.2y}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x^2+y^2-x2x}{(x^2+y^2)^2} & Q'_y \end{pmatrix}$$ Sim E ℓ

$C_1: (x-3)^2 + y^2 = 4$



Es conexa

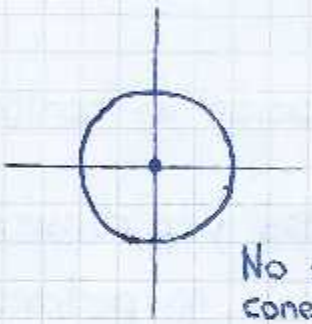
$\int F\,ds = 0$

C1 ℓ pot

$C_2: x^2 + y^2 = 4$

$\begin{cases} x = 2\cos t \\ dx = -2\sen t\,dt \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2\sen t \\ dy = 2\cos t\,dt \end{cases}$



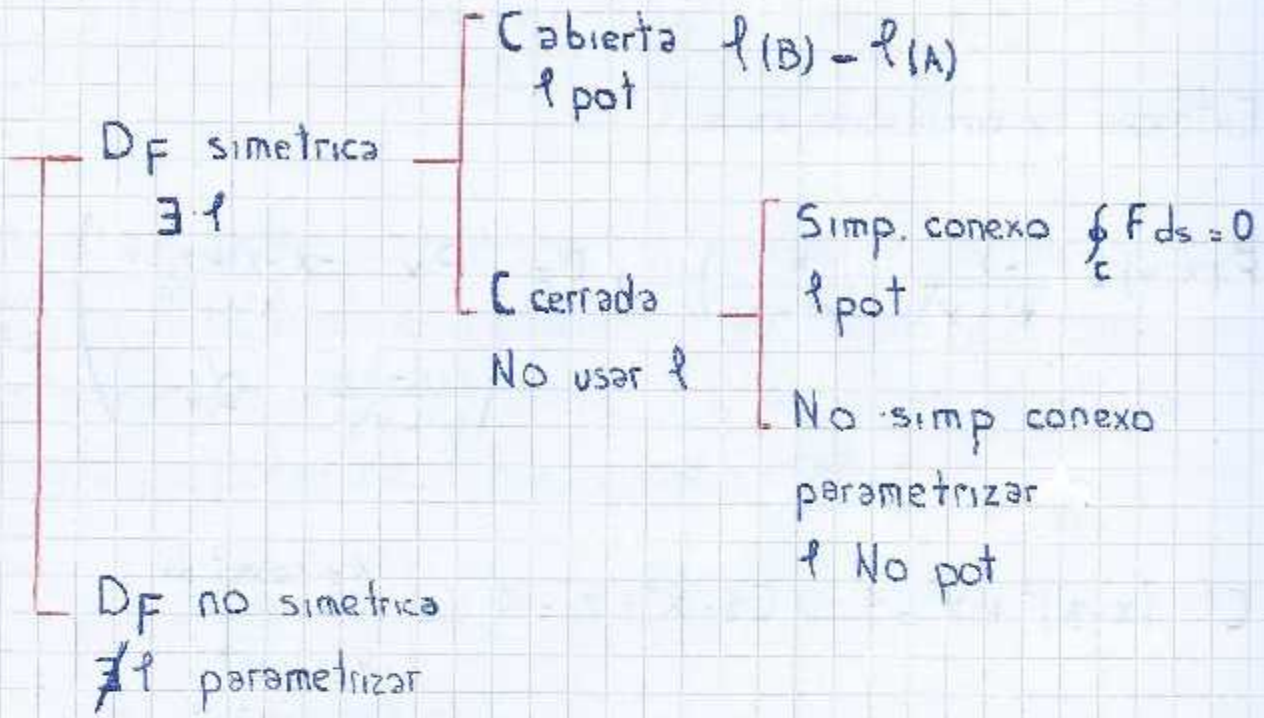
No simp conexo

$$\int_{C_2} F\,ds = \int -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{4\sen^2 t}{4} + \frac{4\cos^2 t}{4}$$

$$= t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$ No pot

Un recinto se dice simplemente conexo si todo punto interior al mismo pertenece al dominio del campo



Principio de deformación de contorno

Dadas 2 C_1 C_2 cerradas y F conservativo. C_1 y C_2 tienen en su interior al unico punto no perteneciente al dominio de F entonces $\int_{C_1^+} = \int_{C_2^+}$

Hallar $g(x)$ si el siguiente campo es conservativo.

$F(x,y) = (y\,g(x) + x^2,\ x\,g(x) + x^2 + y^3)$

$F(0,1) = (6,1)$

$$D_F = \begin{pmatrix} \sim & g(x) \\ g(x) + x g'(x) + 2x & \sim \end{pmatrix}$$ Tienen que ser simetricas

$$g(x) + x g'(x) + 2x = g(x)$$

$$y + xy' + 2x = y$$

$$xy' = -2x$$

$$y' = -2$$

$$y = -2x + C$$

$$\boxed{g(x) = -2x + C}$$

$$F(0,1) = (6,1)$$

$$F(0,1) = (g(0), 1) = (6,1)$$

$$\boxed{g(0) = 6}$$

$$\hookrightarrow g(x) = -2x + C$$

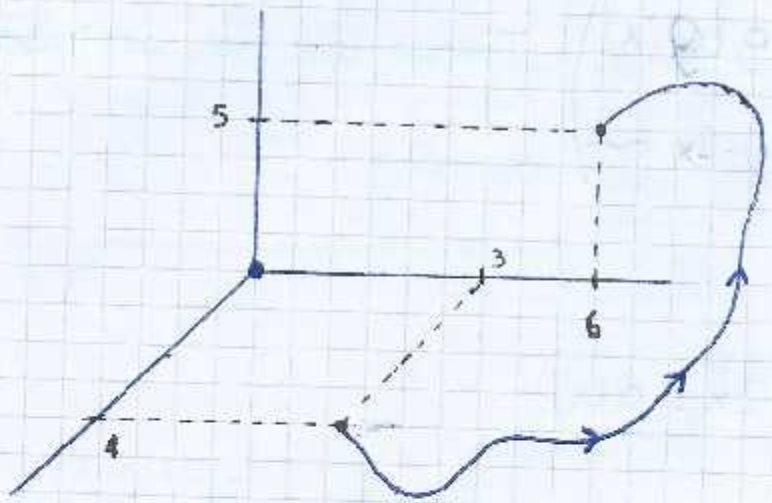
$$6 = 0 + C$$

$$6 = C$$

$$\boxed{g(x) = -2x + 6}$$

Calcular circulación del campo sobre la curva

$F(x,y,z) = (3x^2, 2y, 2z)$



$$D_F = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Simetrica
$\rightarrow \exists$ f pot

$$f = \int 3x^2\,dx = x^3 + \alpha(y,z)$$
$$f = \int 2y\,dy = y^2 + \beta(x,z)$$
$$f = \int 2z\,dz = z^2 + \gamma(x,y)$$

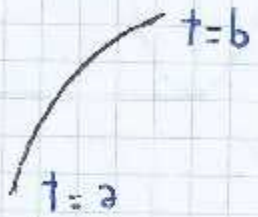
$$\boxed{f = x^3 + y^2 + z^2}$$

$$\int_c F\,ds = f(0,6,5) - f(4,3,0)$$
$$= 6^2 + 5^2 - (4^3 + 3^2)$$
$$= -11$$

NOTA

Longitud de Arco

Dada una curva en R2 o R3 parametricamente $C: F(t)$, su longitud de arco viene dada por $\int_{t=a}^{b} |F'(t)|\, dt$



Calcular Longitud de la circunferencia

$x^2 + y^2 = 9 \rightarrow 6\pi$

$F(t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t)$

$F'(t) = (-3\operatorname{sen} t, 3\cos t)$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\operatorname{sen} t)^2 + (3\cos t)^2}\, dt \Rightarrow \sqrt{-3^2 \operatorname{sen}^2 t + 3^2 \cos^2 t}$$

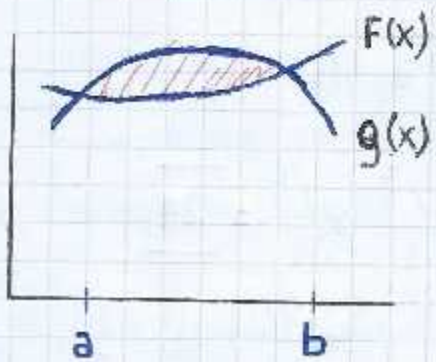
9

$\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{9}\, dt$$

$$= 3t \Big/_0^{2\pi} = 3 \cdot 2\pi = \boxed{6\pi}$$

Integrales Dobles



$$\text{Area} = \int_{x=a}^{b} \int_{y=g(x)}^{F(x)} dy$$

- Area definida por $y = x^2$, $y = x$

Se integra primero aquella variable que depende de otras

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} dy\,dx = \int_{x=0}^{1} dx \int_{x^2}^{x} dy$$

$$= \int_0^1 x - x^2\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

Si los límites de integración fueran ambos constantes la región corresponde a un rectangulo y la integral doble se puede calcular como producto de simples.

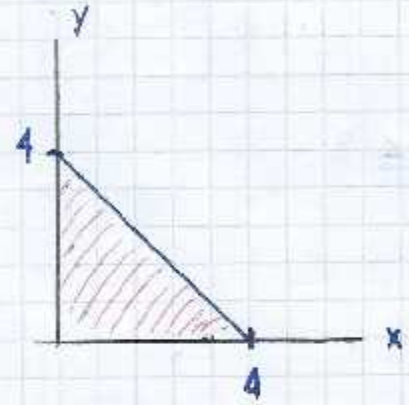
Ejercicio

$$\int_1^7 \int_2^6 dy\,dx$$

$$= x\Big|_1^7 \; y\Big|_2^6 = \boxed{24}$$

Cambio de variable en una integral doble

Sirve para transformar una region en un rectangulo

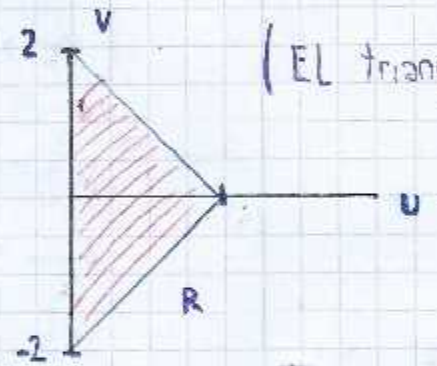


$$\iint_D dy\,dx = 8$$

$$\begin{matrix} x = u - v \\ y = u + v \end{matrix} \rightarrow DF = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{cases} 4 = u+v \\ 0 = u+v \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 0+v \\ 4 = 0+v \end{cases}$$

$u = 2 \quad u = 2$
$v = -2 \quad v = 2$



(El triangulo esta al reves) 0.0

$$\iint_R 2\,dv\,du = 4 \cdot 2 = 8$$

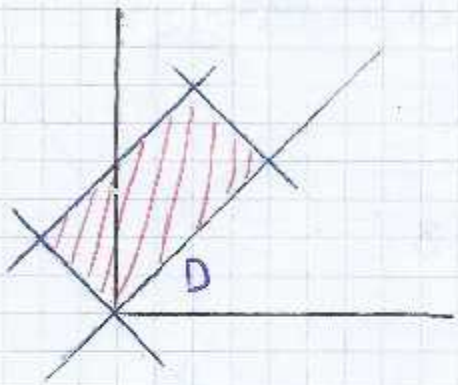
Sea D una Region en el plano XY y F(u,v) una transformacion con Jacobiano

Sea R La region en el plano UV que corresponde a la imagen D a traves de F(u v) Entonces

$$\iint_D dy\,dx = \iint_R |DF|\,du\,dr$$

- Hallar el siguiente area mediante un cambio de variable conveniente

$y \geq x,\ y - x \leq 4,\ y \geq -x,\ y + x \leq 8$



$$0 \leq \frac{u}{y - x} \leq 4$$

$$0 \leq \frac{y + x}{v} \leq 8$$

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \\ y = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \end{cases}$$

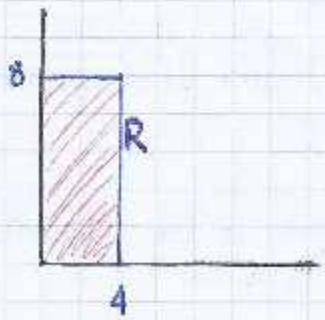
$$|DF| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \left|-\frac{1}{2}\right| = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$u + v = 2y$$

$$\frac{u+v}{2} = y$$

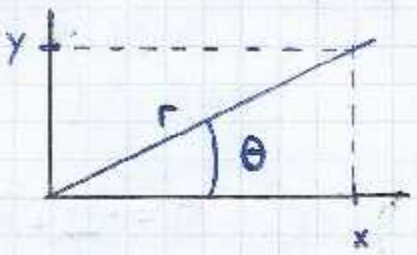
$$u - v = -2x$$

$$\frac{u-v}{-2} = x$$



$$D = \iint_R \frac{1}{2}\, dv\, du = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = \boxed{16}$$

Cordenadas Polares (Transforman circulos en rectangulos)



$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Regla nemotécnica:
- Orden alfabetico
x : c
y : s

- $x^2 + y^2 = r^2$

$$\text{Jacob} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = \boxed{r}$$

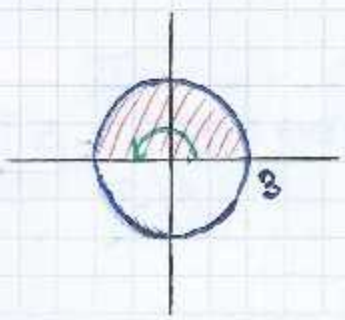
$$\iint_D dy\,dx = \iint_R r\,dr\,d\theta$$

- Calcular el area de la region

$x^2 + y^2 \leq 9, \quad y \geq 0$

$r^2 \leq 9$

$r \leq 3$



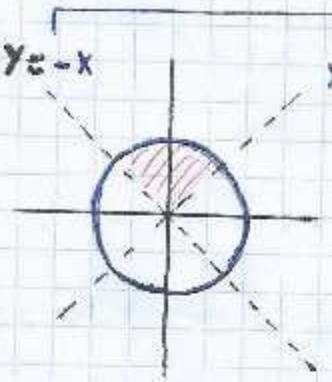
$$\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{3} r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \int_{r=0}^{3} r\,dr = \theta\Big|_0^{\pi} \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^3$$

$$= \pi\,\frac{9}{2} = \boxed{\frac{9}{2}\pi}$$

- Hallar área de:

$x^2 + y^2 \leq 9$, $y \geq x$, $y \geq -x$



$y = x \longrightarrow r\operatorname{sen}\theta = r\cos\theta$ ↳ $r\operatorname{sen}\theta = -r\cos\theta$

$\operatorname{tg}\theta = 1$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\theta = -1$

$\theta = \pi/4$ $\qquad$ $\theta = -\frac{\pi}{4} + \pi$

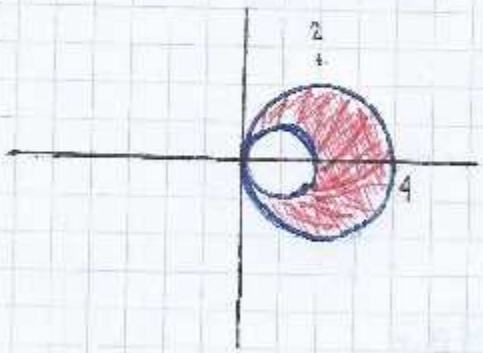
$\theta = \frac{3}{4}\pi$

$= \frac{1}{2}\pi \frac{r^2}{2}\Big|_0^3$

$= \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{9}{2}$

$= \pi \frac{9}{4}$

- Hallar el area de: $(x-1)^2 + y^2 \geq 1$, $(x-2)^2 + y^2 \leq 4$



$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$ $\qquad$ $x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$

$r^2 - 2r\cos\theta = 0$ $\qquad$ $r^2 - 4r\cos\theta = 0$

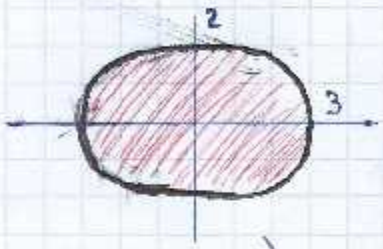
$r^2 = 2r\cos\theta$ $\qquad$ $r^2 = 4r\cos\theta$

$r = 2\cos\theta$ $\qquad$ $r = 4\cos\theta$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r\,dr\,d\theta \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 6\cos^2\theta\,d\theta \Rightarrow 6\left(\frac{\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 3\pi$$

Area de La elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$$

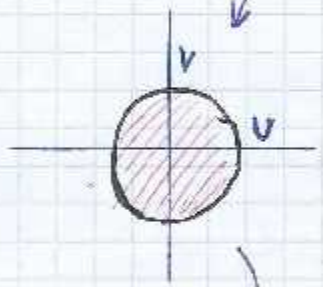


$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 1$$

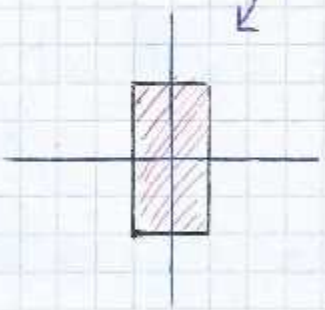
U V

$$u^2 + v^2 \leq 1$$

$$u = \frac{x}{3} \qquad v = \frac{y}{2}$$



$$\begin{cases} x = 3u \\ y = 2v \end{cases}$$



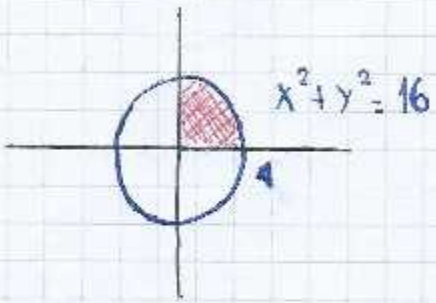
$$|DF| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 6r\,dr\,d\theta = 2\pi\, 3r^2 \Big|_0^1$$

$$= 2\pi \cdot 3 = 6\pi$$

Llevar a cartesiana la siguiente integral dada en polares

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^4 r^2\cos\theta\, dr\, d\theta = \iint \underbrace{r\cos\theta}_{x}\ \underbrace{r\, dr\, d\theta}_{dy\, dx}$$



$$\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}} x\, dy\, dx$$

- $\iint \underbrace{r\,\text{sen}\,\theta}_{y}\ \underbrace{r\, dr\, d\theta}_{dy\, dx}$
- $\iint r^2\, dr\, d\theta = \iint \underbrace{r}_{\sqrt{x^2+y^2}}\ r\, dr\, d\theta\ dy\, dx$
- $\iint \underbrace{\text{sen}\,\theta}\ \underbrace{r\, dr\, d\theta}_{dy\, dx}$

$r\,\text{sen}\,\theta = y$

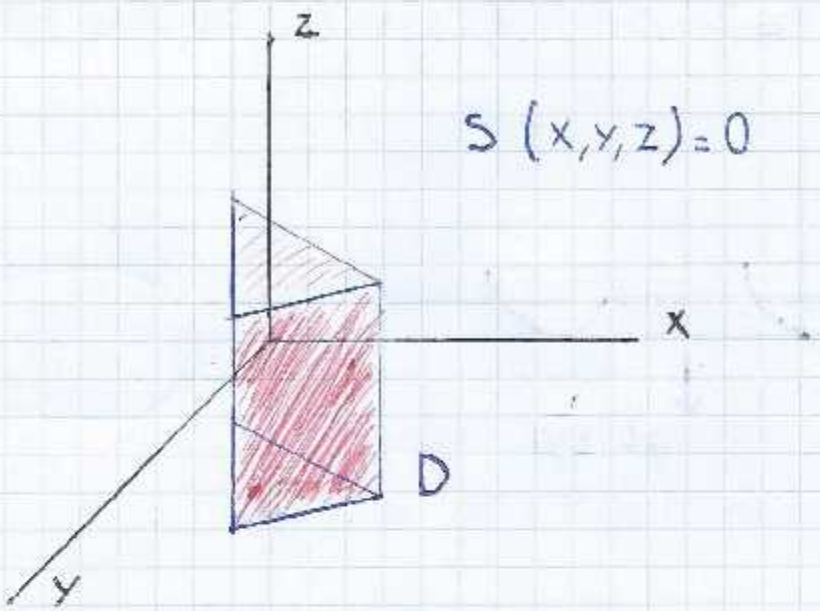
$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r}$

$$\boxed{\text{sen}\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

- $\iint dr\, d\theta = \iint \underbrace{\frac{1}{r}}_{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}\ r\, dr\, d\theta\ dy\, dx$

Area en R3 (Integral de superficie)

Dada una superficie llamaremos D a su proyeccion sobre los planos coordenados



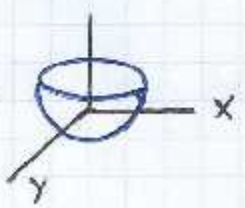
$$\text{Area } S = \iint_D \frac{|\nabla s|}{|S'z|}\, dy\, dz$$

Hallar el area de la superficie $S: z = x^2 + y^2$ limitada con $z \leq 9$

Tener en cuenta que para elegir el plano a cual proyectar debe haber unicidad entre los puntos de la superficie y su sombra

$S: z = x^2 + y^2$ Limitado con $z \leq 9 \longrightarrow x^2 + y^2 \leq 9$

1)



2)

3) $\nabla(x,y,z) = (2x, 2y, -1)$

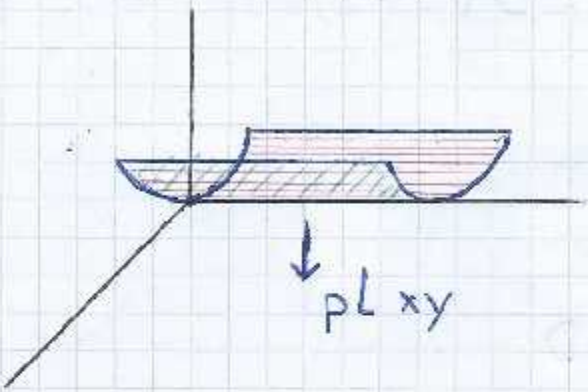
$$\iint_D \frac{\sqrt{(2x)^2 + 2y^2 + 1}}{|-1|}\, dy\, dx$$

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{4r^2 + 1}\; r\, dr\, d\theta$$

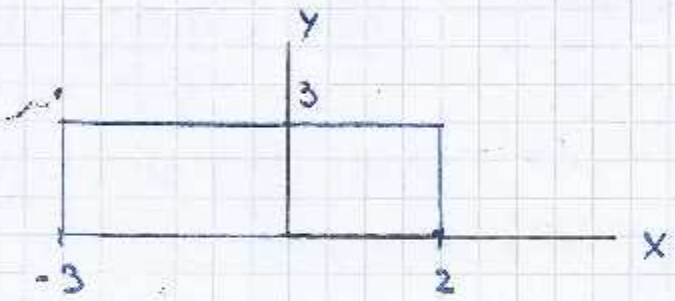
$$= 2\pi \left. \frac{(4r^2+1)^{3/2}}{12} \right|_0^3 = \boxed{2\pi \cdot 18{,}67}$$

- Hallar el area de la superficie $S: z = x^2$ Limitada con $x + z \leq 6$, $0 \leq y \leq 3$

1)



2)



$x + x^2 \leq 6 \quad 0 \leq y \leq 3$

$-3 \leq x \leq 2$

3) $\nabla S = (2x, 0, -1)$

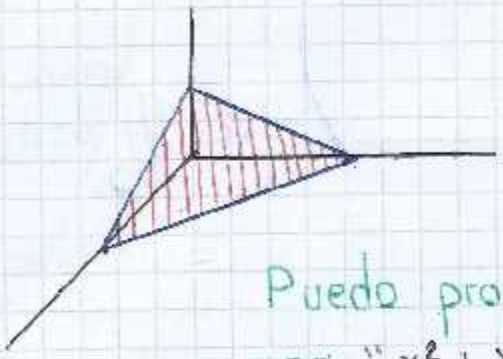
$$\iint_D \frac{\sqrt{(2x)^2 + 1^2}}{|-1|} \, dy \, dx$$

$$= \int_0^3 \int_{-3}^{2} \sqrt{4x^2 + 1} \, dy \, dx$$

$$= 3 \cdot \int_{-3}^{2} \sqrt{4x^2 + 1} \, dx \quad \longleftarrow \text{Por tabla}$$

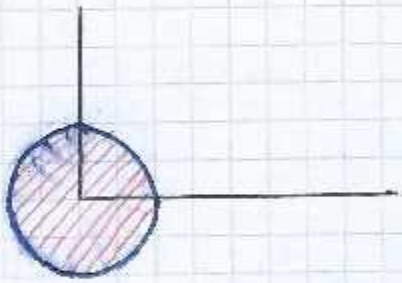
Hallar el area de S: $x+y+z=6$ Limitado con "$x^2+y^2 \leq 1$"

1)



Puedo proyectar en cualquier plano pero como "$x^2+y^2 \leq 1$" me conviene usar xy

2) Pl XY



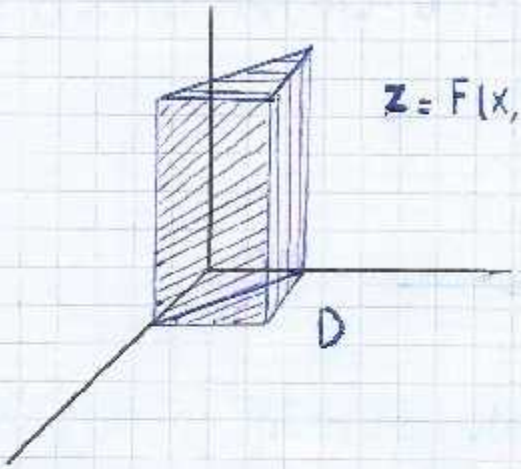
3) $\nabla s = (1,1,1)$

$$\iint_D \frac{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}{|1|}\, dy\, dx$$

$$= \sqrt{3} \iint_D dy\, dx$$

$$= \sqrt{3}\, \pi r^2 = \sqrt{3}\, \pi$$

Volumen Integral Triple



$$Vol = \iiint_{D}^{F(x,y)} dz\, dy\, dx$$

- Calcular volumen del solido definido por $z \leq x^2$, $y \leq x$, $x \leq 3$ en el 1er octante

- 1er octante $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$

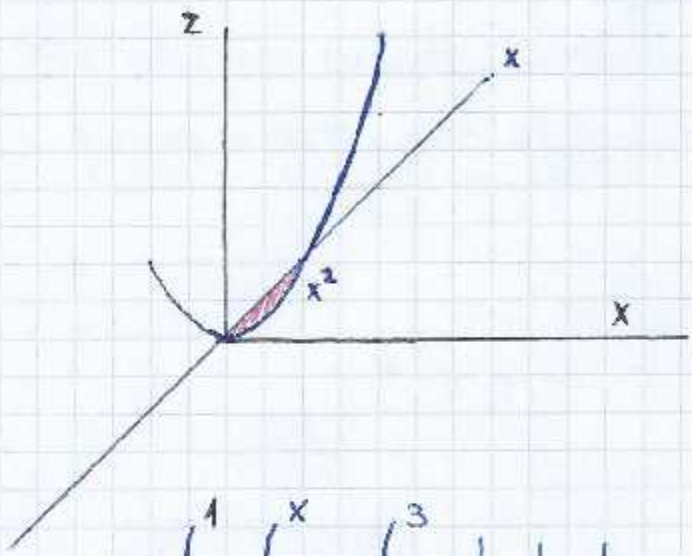
$$\int_0^3 dx \int_0^x dy \int_0^{x^2} dz \Rightarrow \int_0^3 y \Big|_0^x z \Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^3 x x^2 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^3 = \boxed{\frac{81}{4}}$$

Si el solido viene dado completamente por desigualdades las mismas constituyen los Lim de integración, no hace falta graficar

Si no todas son desigualdes graficar en R2

- $z = x^2$, $z = x$



$$\int_{x=0}^{1} \int_{z=x^2}^{x} \int_{y=0}^{3} dz\, dy\, dz$$

$x = x^2$ $\quad 0 = 3$

$x \Big|_0^1$

Si no sé los límites puedo probar igualando los anteriores

$$= \int_0^1 z \Big|_{x^2}^{x} \; y \Big|_0^3 \; dx$$

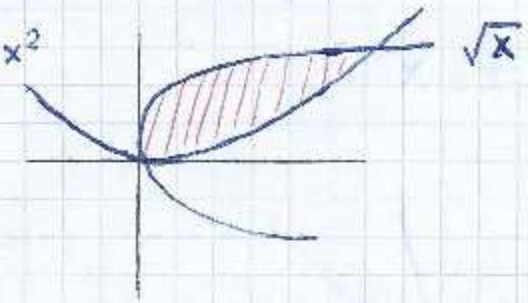
$$= \int_0^1 (x - x^2) \cdot 3 \, dx$$

$$= \frac{3}{2} x^2 - x^3 \Big|_0^1$$

$$\boxed{= 1/2}$$

Volumen de: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $1 \leq z \leq 6$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_1^6 dz\, dy\, dx$$



$x^2 = \sqrt{x}$ $1 \leq 6$

$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

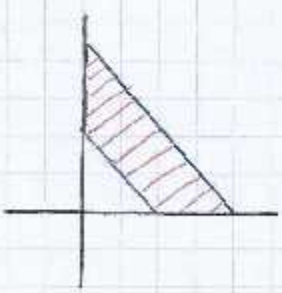
$$= 5 \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx$$

$$= 5 \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$= 5 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= 5/3$$

- $x + y + z \geq 1$, $x + y + z \leq 6$ en el primer octante



Resto Volumenes

$$\int_0^6 \int_{y=0}^{6-x} \int_{z=0}^{6-x-y} dz\, dy\, dx - \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz\, dy\, dx$$

$0 = 6 - x - y$

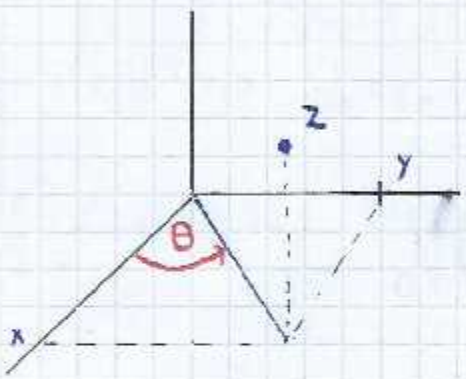
$y = 6 - x$

$6 - x = 0$

$6 = x$

Coordenadas cilindricas (Polares + "z")

Se utilizan cuando el sólido es un cilindro, cono, paraboloide y quizas espera que al proyectar se obtiene un circulo



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z \end{cases}$$

- $r^2 = x^2 + y^2$
- Jacobiano $= R$

$$\iiint dz\,dy\,dx = \iiint r\,dz\,dr\,d\theta$$

Hallar el volumen de $x^2+y^2 \leq z \leq 9$

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{0}^{3}\int_{z=x^2+y^2=r^2}^{9} = 2\pi\int_0^3 r\,z\Big|_{r^2}^{9}\,dr$$

$x^2+y^2=9$

$r^2=9$

$r=3$

$$= 2\pi\int_0^3 (9r - r^3)\,dr = 2\pi\left(\frac{9}{2}r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^3$$

$$= 2\pi\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right)$$

$$\boxed{= \frac{81\pi}{2}}$$

- $x^2+z^2 \leq y \leq 18-x^2-z^2$ Primer octante

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_{y=r^2}^{18-r^2} r\,dy\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^3 r\,y\Big|_{r^2}^{18-r^2}\,dr$$

$r^2 = 18-r^2$

$r^2 = 9$

$r = 3$

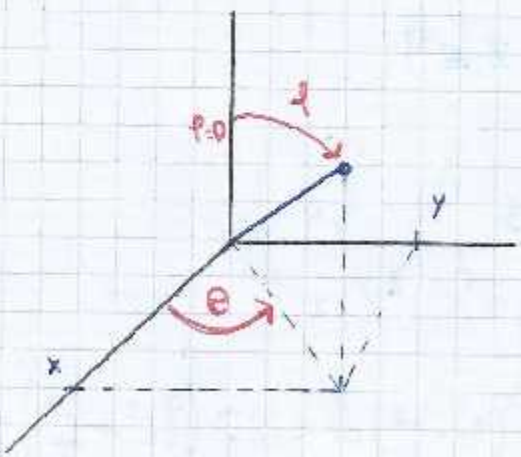
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^3 r(18-r^2)-r^3\,dr$$

$$= \int \frac{\pi}{2}\left(9r^2-\frac{r^4}{2}\right)\Big|_0^3$$

$$= \frac{81\pi}{4}$$

Coordenadas esfericas

(Se utilizan para volumen de esfera y espera/cono.)



$r \Rightarrow \mathbb{R}^3$

$\theta \Rightarrow plxy$

$\phi \Rightarrow \mathbb{R}^3$

↑ Igual que polares, solo se agrega el sen.

- $x = r\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\phi$
- $y = r\operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\phi$
- $z = r\cos\phi$

- $x^2+y^2+z^2 = r^2$
- Jacobiano $= r^2\operatorname{sen}\phi$

- Hallar el volumen de $x^2+y^2+z^2 \leq 9$, $z \geq 0$

↳ Esto significa que es el interior de la esfera

$r^2 = 9$

$r = 3$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{3} r^2 \operatorname{sen}\rho \, dr\,d\rho\,d\theta$$

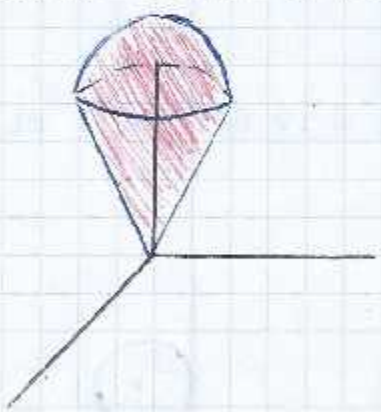
$$= \frac{r^3}{3}\Big/_0^3 (-\cos\rho)\Big/_0^{\pi/2} 2\pi$$

→ calculo volumen

$$= 9\,(-1)\,2\pi$$

$$= 18\pi$$

- Calcular volumen de $x^2+y^2+z^2 \leq 9$, $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$



- Por cilindricas

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{3/\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{9-r^2}}$$

- Por esfericas

$0 \leq \rho \leq$ cono

$z = \sqrt{x^2+y^2}$

$z^2 = x^2+y^2$

$2z^2 = x^2+y^2+z^2$

$2r^2\cos^2\rho = r^2$

$\cos\rho = \sqrt{1/2} \Rightarrow \rho = \pi/4$

$x^2+y^2+z^2 \leq 9$

$r^2 \leq 9$

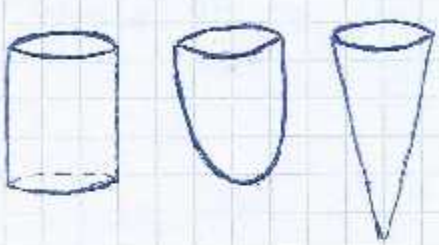
$r \leq 3$

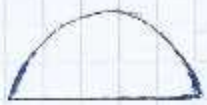
$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_0^{3} r^2 \operatorname{sen}\rho \, dr\,d\theta\,d\rho$$

$$= \frac{r^3}{3}\Big/_0^3 (1-\cos\rho)\Big/_0^{\pi/4} 2\pi$$

$$= 18\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

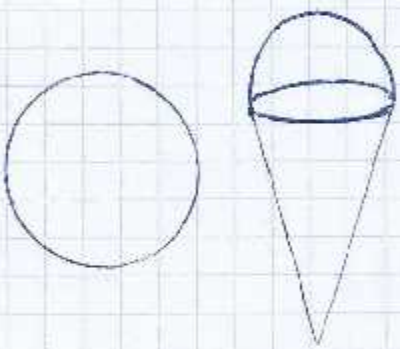
Recomendaciones

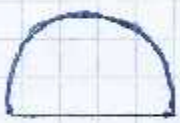




menos de media espera

⇒ Cilindricas





Media espera

⇒ Esfericas

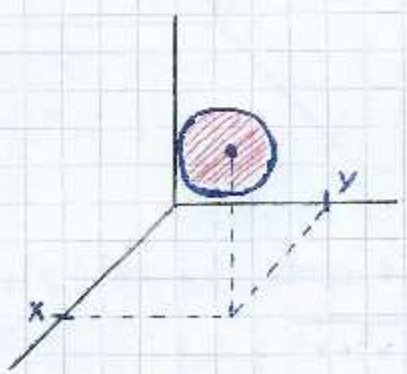
Calculo de masa

1- Densidad en cada punto proporcional a la distancia al plano XY

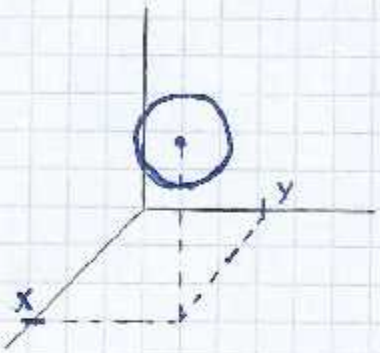
$$\text{Masa} = \iiint_{Vol} d \, dz\, dy\, dx$$

$$d = K|z|$$

$$\text{Masa} = K \iiint_{Vol} z \, dz\, dy\, dx$$



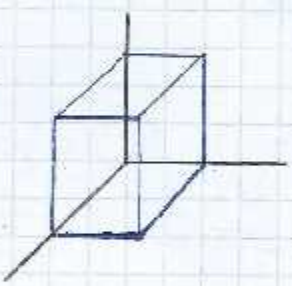
2) Densidad en cada punto proporcional a la distancia al eje z



$$d = K\sqrt{x^2+y^2}$$

$$K \iiint_{vol} \sqrt{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx = \text{Masa}$$

- $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ $0 \leq z \leq 1$ si la densidad en cada punto es proporcional al plano XZ



$$d = Ky$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 Ky\, dz\, dy\, dx =$$

$$= z\Big|_0^1 \; x\Big|_0^1 \; K\frac{y^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{K}{2} = K/2$$

Flujo de un campo vectorial a traves de una superficie

$$F(x,y,z) = (P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$$

S:

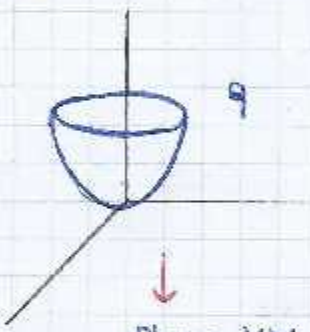
$$\text{Flujo } S = \iint_S F \cdot \bar{n}\, ds = \iint_D \frac{F \cdot \nabla s}{|15'z|}\, dy\, dx$$

- Calcular el flujo del campo

$F(x,y,z) = (\overset{P}{y}, \overset{Q}{z^2}, \overset{R}{2z})$

$S: z = x^2 + y^2$ Limitado con $z \leq 9$

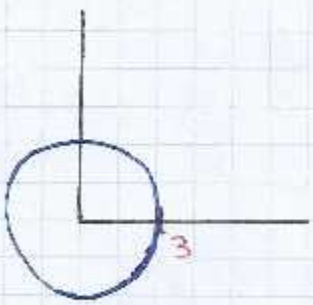
1) Grafico S



$z = x^2 + y^2$

$z \leq 9$

2)



$x^2 + y^2 \leq 9$

3) $\nabla s = (2x, 2y, -1)$

$$\iint_D = \frac{(y, (x^2+y^2)^2, 2(x^2+y^2))\ (2x, 2y, -1)\, dy\, dx}{|-1|}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{3} (2r^2\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta + 2r^5\operatorname{sen}\theta - 2r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

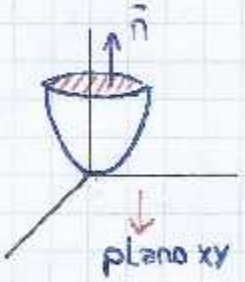
$$= \frac{r^4}{2}\Big|_0^3 \frac{\operatorname{Sen}^2\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{7}r^7\Big|_0^3 (-\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} - \frac{r^4}{2}\Big|_0^3 2\pi = \boxed{-81\pi}$$

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{0}{0}$$

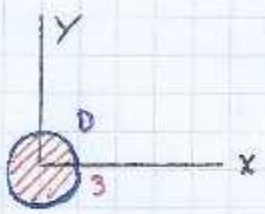
Si el flujo es $\ominus$ se dice entrante si es $\oplus$ saliente. Se indica en la grafica el sentido de orientacion de la normal.

Si la superficie dice "limitada con" es abierta si dice "frontera de un cuerpo" es cerrada

- Calcular el flujo para el campo anterior pero como superficie $z = 9$. $F(x,y,z) = (y, z^2, 2z)$ S: 9 limitado con $z \leq x^2+y^2$



$\nabla s = (0,0,1)$



$$\iint_D \frac{(y, 9^2, 2\cdot 9)\,(0,0,1)\,dy\,dx}{|1|}$$

$$\iint_D 18\,dy\,dx = 18\pi\,3^2 = 162\pi$$

Flujo $F = -81\pi + 162\pi$

S. cerrada $= 81\pi$

Teorema de La divergencia (Gauss)

Sirve para calcular flujo de un campo a través de una superficie cerrada (frontera de un cuerpo), con normal EXTERIOR

$F = (P, Q, R)$

S: superficie cerrada

$$\text{Flujo } F = \iiint_{\text{vol}} \text{div } F \, dz\,dy\,dx$$
$$S \text{ cerrada}$$

Divergencia $F = P'_x + Q'_y + R'_z$

- Para el ejercicio anterior

$\text{Div } F = 0 + 0 + 2$

$$\iiint_{\text{vol}} 2 \, dz\,dy\,dx$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{r^2}^9 r \, dz\,dr\,d\theta$$

$$= 2 \cdot 2\pi \int_{r=0}^{3} r \, z \Big|_{r^2}^{9} dr$$

$$= 4\pi \int_0^3 (9r - r^3)\, dr$$

$$= 4\pi \left(\frac{9}{2}r^2 - \frac{r^4}{4}\right) \Big|_0^3 = 4\pi \, \frac{81}{4} = \boxed{81\pi}$$

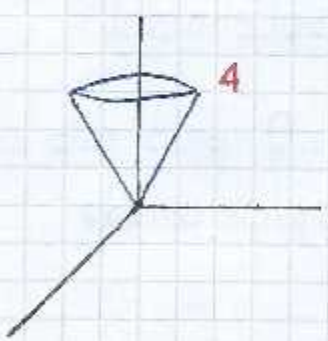
Si la divergencia de f es 1 el flujo a traves de la superficie cerrada coincide con el volumen de la misma

Si la divergencia es constante el flujo es proporcional al volumen

Si la divergencia es 0 el campo se dice solenoidal y en dicho caso el flujo a traves de cualquier superficie cerrada es nulo

Tener en cuenta que si la superficie no es cerrada ya que le falta 1 tapa. Hacemos divergencia y restamos el flujo a traves de la tapa por definicion con normal exterior.

- Calcular el flujo del campo a través de la superficie
  $F(x,y,z) = (x,z,y)$ S: $z = \sqrt{x^2+y^2}$ limitada con $z \leq 4$



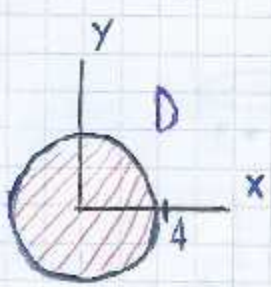
Divergencia $F = 1+0+0 = 1$

$\iiint_{Vol} 1 \, dz\, dy\, dx = \frac{4^2 \cdot 4\pi}{3} = \frac{64}{3}\pi$ Flujo S cerrada

Si $z = 4$

$z = 4$

$\vec{n} = (0,0,1)$



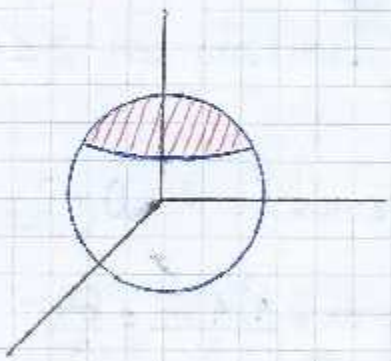
$$\iint_D \frac{(x,4,y)\,(0,0,1)\,dy\,dx}{|1|}$$

$$= \iint_D y\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^4 r\,\text{sen}\,\theta\; r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{r^3}{3}\Big|_0^4 \cdot \left(-\cos\theta\Big|_0^{2\pi}\right) = 0$$

Flujo F = $\frac{64}{3}\pi - 0$
S abierta

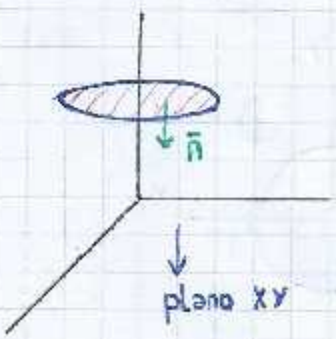
- Calcular el flujo del campo $F(x,y,z) = (g(y,z), h(x,z), 6)$ a través de la superficie $S: x^2+y^2+z^2 = 9$ Limitado con $z \geq \sqrt{5}$



Div F : 0 + 0 + 0 = 0
Solenoidal

→ Flujo F = 0 pero esto es en superficie cerrada

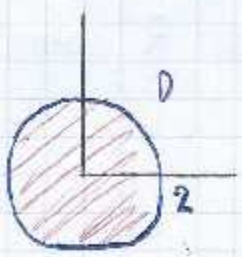
TAPA (S, $z = \sqrt{5}$)



$\bar{n} = (0,0,-1)$ Hay que ponerlo negativo porque la normal va para otro lado

$x^2 + y^2 + \sqrt{5}^2 = 9$

$x^2 + y^2 = 4$

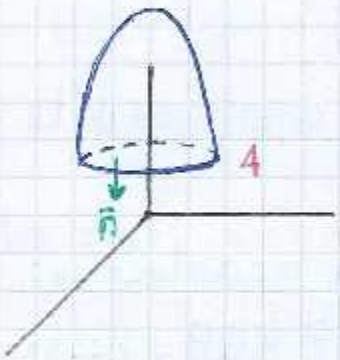


$$\iint_D \frac{(g(y,\sqrt{5}),h(x,\sqrt{5}),6)\,(0,0,-1)\,dy\,dz}{|-1|}$$

$$= \iint_D -6\,dy\,dx = -6\pi 2^2 = \boxed{-24\pi}$$

▸ Sea F solenoidal, calcular su flujo a traves de la superficie S: $z = 8 - x^2 - y^2$ Limitada con $z \geq 4$ si se sabe que $F(x,y,4) = (y^2, x, 6)$

Si F solenoidal $\rightarrow$ Div $F = 0$



Tapa

Flujo es 0 en la superficie cerrada pero al ser abierta hay que restar la tapa. Se procede igual que el ejercicio anterior $\vec{n} = (0,0,-1)$

Flujo tapa $= -24\pi$

Total $= 0 - -24\pi = \boxed{24\pi}$

▸ Sea S una superficie cerrada cualquiera $F(x,y,z) = (g(x,y)\,x, -y\,g(x,y), 4)$

$g \rightarrow u \begin{cases} x \\ y \end{cases}$ Div $F = g + x\,g'u \cdot \underbrace{u'x}_{y} - g - y \cdot g'u \underbrace{u'y}_{x} + 0$

$= g + xy\,g'u - g - xy\,g'u = 0$ Solenoidal

Flujo $= 0$

Teorema del rotor (Stokes)

Sirve para calcular circulación de un campo en R^3 sobre una curva cerrada en R^3

$F = (P, Q, R)$ cerrada

$$\oint_{C \text{ cerrada}} \bar{F}\, ds = \iint_S \text{rot } F\ \bar{n}\, ds = \iint_D \frac{\text{rot}_F \nabla_S \, dy\, dx}{|S'z|}$$

- La superficie S es cualquiera que tenga como borde a la curva, si es posible un plano

El sentido de circulacion de la curva y de orientacion de la norma siguen la regla de la mano derecha.

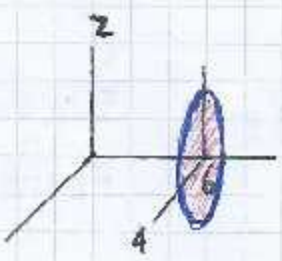
$$\text{Rotor } F = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y)$$

Regla nemotécnica:
R Q P R Q P ⇒ y z z x x y ⇒
agregar ⊖ y primas

- Calcular circulación del campo

$F(x,y,z) = (\overset{P}{xy}, \overset{Q}{y}, \overset{R}{z})$

$C: (x,y,z) = (4\text{sen}\, t, 6, 4\cos t)$ ⟶ Poner t y verificar el sentido de circulación



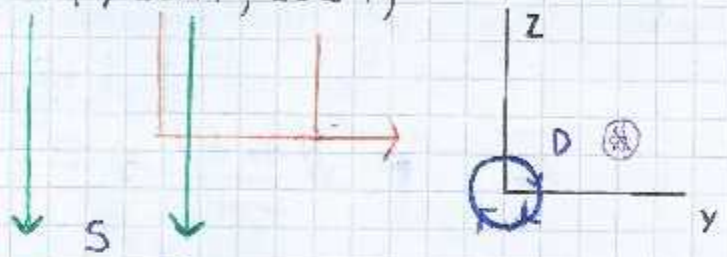
$S: Y = 6 \quad \bar{n} = (0,1,0)$

Rotor F $(0-0, 0-0, 0-x)$

Rotor F $= (0, 0, -x)$

$$\iint_D \frac{(0,0,-x)\,(0,1,0)\, dz\, dx}{|1|}$$

- Calcular circulación del campo $F(x,y,z) = (\overset{P}{z}, \overset{Q}{xy}, \overset{R}{4})$ sobre la curva $C: (x,y,z) = (\text{sen}\, t, \text{sen}\, t, \cos t)$



S

$x = y$

$S: x - y = 0$

$\bar{n} = (-1, 1, 0)$

$\text{Rot}\, F = (0-0, 1-0, y-0)$

$\text{Rot}\, F = (0, 1, y)$

$$\iint_D \frac{(0,1,y)\,(-1,1,0)}{|-1|}\, dz\, dy = \iint_D dz\, dy = \pi r^2 = \pi$$

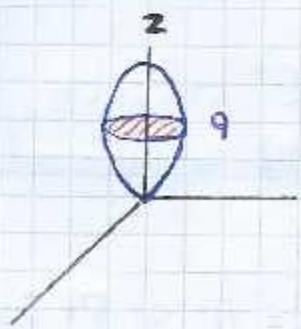
- Si la curva viene parametrizada tiene circulación entonces $\bar{n}$ se saca con la mano derecha.

- Si la curva viene dada como intersección de dos superficies, la normal vale cualquiera de las dos

Ejemplo: Calcular circulación del campo $(\overset{P}{x}, \overset{Q}{6}, \overset{R}{z^2})$ para la curva.

$C:$ — $z = x^2 + y^2$

— $z = 18 - x^2 - y^2$

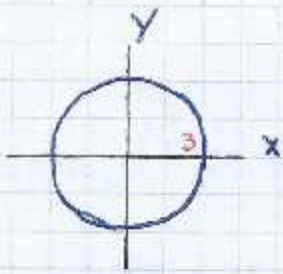


$z = 18 - (x^2 + y^2)$

$z = 18 - z$

$z = 9 \Rightarrow S: z = 9$

$\bar{n} = (0,0,1)$



$$x^2+y^2=9$$

$$\text{Rot } F = (0-0,\ 0-0,\ 0-1) = (0,0,-1)$$

$$\iint_D \frac{(0,0,-1)(0,0,1)}{|-1|}\,dx\,dy$$

$$= -\iint \underbrace{dx\,dy}_{\text{Area}} \Rightarrow \boxed{D = -9\pi}$$

- Si el rotor $F = (0,0,0)$ el campo se dice irrotacional, es decir matriz jacobiana simetrica con lo cual la circulacion será nula sobre cualquier curva cerrada

- Probar que si F es C^2 el flujo del rotor a través de cualquier superficie cerrada es nulo

$$\iint_S \text{rot } F\ \bar{n}\ ds = \iiint_{vol} \text{div rot } F\ dz\,dy\,dx = 0$$

$$\text{div}\,(R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y)$$

$$= R''_{yx} - Q''_{zx} + P''_{zy} - R''_{xy} + Q''_{xz} - P''_{yz} = \boxed{0}$$

Sea $F \in a\ C^2$ calcular la circulacion del ∇F para una curva cerrada ~~en [redacted]~~ cualquiera en R^3

$$\oint_C \nabla F\,ds = \iint_{S\text{ abierta}} \text{rot } \nabla F\ \bar{n}\,ds \qquad \text{rot}\,(\overset{P}{F'_x}, \overset{Q}{F'_y}, \overset{R}{F'_z})$$

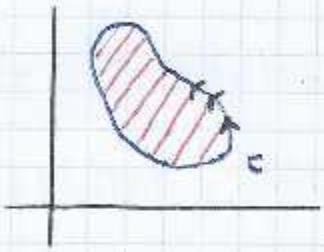
$$= (F''_{zy} - F''_{yz},\ F''_{xz} - F''_{zx},\ F''_{yx} - F''_{xy})$$

$$= (0,0,0)$$

NOTA

Teorema de Green

Sirve para calcular circulación de un campo sobre una curva cerrada en R^2, sentido antihorario.



$F = (P, Q)$

$$\oint_{C^+} F\,ds = \iint_D (Q'x - P'y)\,dy\,dx$$

- Calcular circulacion horaria del campo $(\overset{P}{x}, \overset{Q}{y}, x^2) = F$ sobre la curva C: $y = x$ $y = x^2$

$Q'x - P'y = 2x - x = x$

Como es horaria le agrego un $\ominus$ en el calculo

$$\oint_{C^-} F\,ds = -\iint_D x\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x\,dy\,dx$$

$$= -\int_0^1 x.y \Big/_{x^2}^{x}\,dx = -\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \Big/_0^1 = \boxed{-\frac{1}{12}}$$

Reciproca del teorema de Green (Cálculo de area mediante circulación)

Kepler (Poco Usada)

$F=(-Y,X) \rightarrow Q'_x - P'_y = 1-(-1)=2$

$\int_{c+} -Y\,dx + x\,dy = 2 \text{ area } D$

$$\frac{1}{2}\int_{c+} -Y\,dx + x\,dy = \text{Área. } D$$

$F=(0,X) \Rightarrow Q'x - P'y$

$$\int_{c+} x\,dy = \text{Area } D$$ USAR ESTA

- Hallar el area de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

- Usando Kepler

$$\begin{cases} x = 3\cos t, & dx = -3\operatorname{sen} t\,dt \\ y = 2\operatorname{sen} t, & dy = -2\cos t\,dt \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (6\operatorname{sen}^2 t + 6\cos^2 t)\,dt = 3t\Big|_0^{2\pi} = 6\pi$$

- Usando la otra

$$\int_0^{2\pi} 6\cos^2 dt \quad \text{por tabla} \Rightarrow 6\left(\frac{\operatorname{sen} t\cos t + t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 6\pi$$

Ecuaciones Diferenciales de orden 2

Caso homogeneo con coeficientes constantes

1. Raices IR

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 4$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

- $x_1 = 2$
- $x_2 = 3$

$$\boxed{y = Ke^{2x} + qe^{3x}}$$

$$y' = 2ke^{2x} + 3qe^{3x}$$

$$y(0) = K + q = 2$$
$$y'(0) = 2K + 3q = 4$$

$\Rightarrow q = 0, \; K = 2$

$$\boxed{y = 2e^{2x}}$$ Solución Particular

2. Raiz doble

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

- $x_{12} = 3$

$$\boxed{y = Ke^{3x} + qxe^{3x}}$$

3. Raices complejas

$$y'' - 6y' + 13y = 0$$

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm 4i}{2}$$

$$x = 3 \pm 2j$$

$$\boxed{y = e^{3x}(K\cos 2x + q \operatorname{sen} 2x)}$$

$$y'' + y = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm i$$

$$\boxed{y = e^{0x}(K\cos x + q \operatorname{sen} x)}$$

No homogenea

Se construye primero la solución homogenea luego la particular, la suma de ambas es la general

$y'' - 4y = 8x + 12$

Homogeneo

$x^2 - 4 = 0$

- $x_1 = 2$
- $x_2 = -2$

$y = Ke^{2x} + qe^{-2x}$

General

$y = Ke^{2x} + qe^{-2x} - 2x - 3$

Particular

$Y = Ax + B$

$(Ax+B)'' - 4(Ax+B) = 8x + 12$

$0 - 4Ax - 4B = 8x + 12$

$A = -2$

$B = -3$

$Y = -2x - 3$

$x+1$	$Ax + B$ sino $Ax^2 + Bx + C$
$x^2 + 6$	$Ax^2 + Bx + C$
9	A
$9e^{2x}$	Ae^{2x} sino $(Ax+B)e^{2x}$
xe^{2x}	$(Ax+B)e^{2x}$ sino $(Ax^2+Bx+C)e^{2x}$
$3\,sen(4x)$	$A\,sen(4x) + B\cos(4x)$

- $y'' - 9y = 4e^{3x}$

$x^2 - 9 = 0$

- $x_1 = 3$
- $x_2 = -3$

$y = Ke^{3x} + qe^{-3x}$

$$y = (Ax+B)e^{3x}$$

$$(1Ax+B)e^{3x})'' - 9(Ax+B)e^{3x} = 4e^{3x}$$

$$6A + 9Ax + 9B - 9Ax - 9B = 4$$

$$6A = 4$$

$$A = 2/3$$

$$y = \left(\tfrac{2}{3}x + B\right)e^{3x}$$

$$\boxed{y = (k+B)e^{3x} + 9e^{-3x} + \frac{2}{3}xe^{3x}}$$

Lineas de campo

$F = (P(x,y), Q(x,y))$ sus Lineas de campo se obtienen resolviendo la siguiente funcion diferencial.

$$\boxed{\frac{P}{dx} = \frac{Q}{dy}}$$

- $F(x,y) = (x^2y, x^3)$

L campo $\dfrac{x^2y}{dx} = \dfrac{x^3}{dy}$

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\boxed{\text{L campo } -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C}$$

Si F tiene matriz Jacobiana simetrica tiene función potencial f.

$f = \int P\,dx$

$f = \int Q\,dy$

$f = cte \longrightarrow$ Lequipotenciales

Las Lineas de campo y las lineas equipotenciales son trayectorias ortogonales.

I. Continuidad

Dada $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con el punto "$\bar{A}$" $\in D$ se dice que F es continua en $\bar{A}$, si y solo si:

1) $\exists\, f(\bar{A}),\ f(\bar{A}) \in \mathbb{R}^m$

2) $\exists \lim_{\bar{x} \to \bar{A}} f(\bar{x}) = L,\ L \in \mathbb{R}$

3) $F(\bar{A}) = L$

II. Definición de Curva

Sea $\bar{g}(t): I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ con $m \geq 1$ cuando: — I es un intervalo, — $\bar{g}$ es continua en I

el conjunto imagen de $\bar{g}$ se denomina curva.

$$C = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m / \bar{x} = \bar{g}(t),\ t \in I\}$$

III. Punto simple, regular, suave

Sea una curva de ecuación $\bar{x} = g(t),\ t \in I$

- $A = \bar{g}(t_0)$ es punto simple de la C, si por medio de $g(t)$ es imagen de un solo "t" $\in I$.
- $A = \bar{g}(t_0)$ es punto regular de la C, si existe $f'(g(t_0)) \neq 0$
- $A = \bar{g}(t_0)$ es punto suave de la C, si cumple las condición de punto regular y ademas $f'(g(t_0))$ es continua.

IV. Condición necesaria para función potencial

Sea $F \in C^1$, $\bar{F}: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, D abierto y conexo si existe $\phi / \bar{F} = \bar{\nabla}\phi$ en D, entonces la matriz jacobiana de $\bar{F}$ es simetrica.

- Demostración:

Dada $\bar{F}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / \bar{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$.

Por hipotesis $\exists \phi / \bar{\nabla}\phi = \bar{F}$

$\to \phi'_x = P \quad ; \quad \phi'_y = Q$

$P'_y = \phi''_{xy} \qquad Q'_x = \phi''_{yx}$

Ya que $\phi_{xy} = \phi_{yx} \Rightarrow$ Teorema de Schwarz $\Rightarrow$ **$P'_y = Q'_x \Rightarrow$ matriz jacobiana es simetrica**

V. Solucion Particular y General

- Solución General: Es aquella solución que verifica la ecuación diferencial y en su expresión hay "n" constantes arbitrarias irreducibles

- Solucion Particular: Es aquella que depende de la solución general al asignarle un valor a las constantes arbitrarias.

VI. Extremos relativos o locales

Sea el campo escalar $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido en el conjunto D y el punto $\bar{A} = (a, b)$ punto interior al dominio de f

1) $F(\bar{A})$ es máximo relativo de f en $D \leftrightarrow \exists\, E(\bar{A}) \subseteq D /$ $\forall \bar{x}: [\bar{x} \in E(\bar{A}) \Rightarrow f(\bar{x}) \leq f(\bar{A})]$.

2) $F(\bar{A})$ es mínimo relativo de f en $D \leftrightarrow \exists\, E(\bar{A}) \subseteq D /$ $\forall \bar{x}: [\bar{x} \in E(\bar{A}) \Rightarrow f(\bar{x}) \geq f(\bar{A})]$.

VII. Extremos Absolutos

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / z = f(x,y) \wedge \bar{A} = (a,b) \in D$.
Dado un conjunto incluido en el dominio de $f(D)$ se dice que:

1) $F(\bar{A})$ es máximo absoluto de f en $R \subseteq D \leftrightarrow \forall \bar{x}: [\bar{x} \in R \to F(\bar{x}) \leq f(\bar{A})$ es decir que llamaremos máximo absoluto de f en al mayor valor que adopta la función en el conjunto R

2) IDEM pero invertir

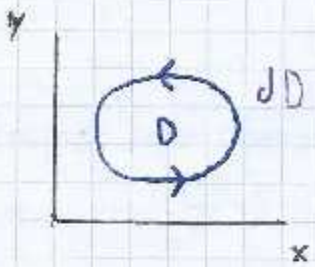
VIII. Derivada direccional

Sea $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $\bar{A} \in D$, su derivada direccional es

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(\bar{A} + h\vec{r}) - F(\vec{A})}{h}$$

siendo $\vec{r}$ el versor respecto del que se deriva.

IX. Teorema de Green

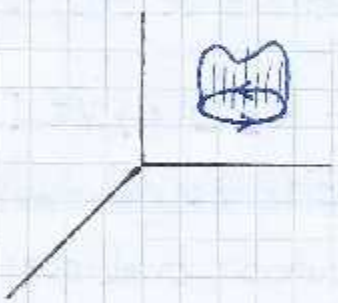


$$\oint_C \bar{F}\,d\bar{s} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dx\,dy$$

Hipotesis

- $F \in C^1$ en todo punto de D y JD
- JD: frontera de D, curva simple, suave a trozos y cerrada
- D: región acotada con frontera JD
- Circulacion antihoraria.

X. Teorema del rotor (stokes)

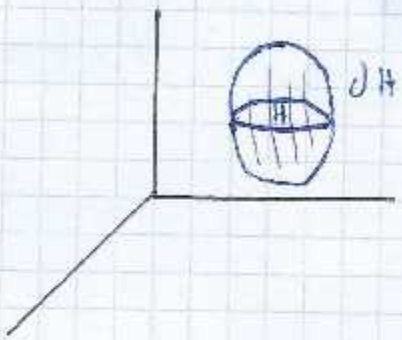


$$\oint_{C^+} F\,\bar{n}\,d\sigma = \iint_{\mathcal{E}} \text{rot}(\bar{F})\,\bar{n}\,d\bar{\sigma}$$

Hipotesis

- $F \in C^1$ para todo punto de $C \wedge \mathcal{E}$
- C: curva simple, suave a trozos, cerrada
- $\mathcal{E}$: superficie abierta "cualquiera" que tenga a la curva C como borde y sea suave a trozos y orientable
- C^+: curva recorrida en sentido positivo respecto a la orientacion que se le dio a la superficie.

XI. Teorema de la divergencia (Gauss)



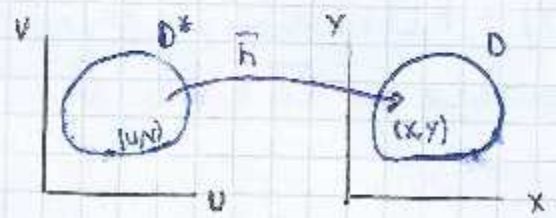
$$\oiint_{\partial H} \bar{F}\, n\, d\sigma = \iiint_{H} \operatorname{div}(\bar{F})\, dx\, dy\, dz$$

Hipotesis

- $\bar{F} \in C'$ en todo punto de $H \wedge \partial H$
- ∂H frontera de H orientable y suave a trozos. Orientada con versor normal saliente
- H: cuerpo acotado, con frontera de volumen nula.

XII. Cambio de variables en integrales dobles

Dada la integral $\iint_D F(x,y)\, dx\, dy$ se la quiere calcular aplicando el cambio definido por: $\underbrace{(X(u,v);\ Y(u,v))}_{\bar{h}(u,v)}$



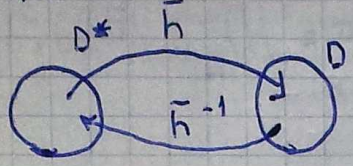
Hipotesis

1) Existencia de $\iint_D F(x,y)\, dx\, dy$

2) $\bar{h} \in C'$ en todo punto D^*

3) $J(u,v) \neq 0$ en todo punto $D^* = \begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{vmatrix}$

4) $\exists\, h^{-1}$



En estas condiciones:

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} F(x(u,v);\, y(u,v))\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

XIII. Teorema de La derivación composicion de funciones (Regla de la cadena

- Sea $\bar{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ campo vectorial diferenciable en $\overline{x_0} \in A$ (Abierto)
- Sea $\bar{F} : B \subseteq \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ campo vectorial diferenciable en $g(\overline{x_0}) \in B$ (Abierto)

Si imagen de $\vec{g} \subseteq$ Dom $\vec{F}$ entonces $\exists\, \vec{h} / \vec{h} = F \circ g$: $A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ / $\bar{h}(\bar{x}) = (\bar{F} \circ \bar{g})(\bar{x}) = \bar{F}[g(x)] = \bar{F}(y) = \bar{F}[y_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, y_s(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ siendo $\bar{h}$ diferenciable en $\overline{x_0} \in A$ y su matriz jacobiana en $\overline{x_0}$

$$\boxed{\nabla h(x,y) = \nabla_F(g(x,y))\,\nabla_g(x,y)}$$

NOTA

XIV. Teorema conjunto de nivel

Sea f un campo escalar definido en $D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se denomina conjunto de nivel "K" de f al conjunto de todos los $\bar{x} \in D_{/f(x)}$ siendo $K \in Im(f)$

$$Cn(K) = \{\bar{x} / \bar{x} \in I) \cap f(\bar{x}) = K\}$$

- En $\mathbb{R}^2$ se denominan curvas de nivel
- En $\mathbb{R}^3$ se denominan superficies de nivel

XV. Diferenciabilidad de un campo escalar en un punto

Dada $\bar{F}: H \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, H abierto, $\bar{A} \in H$, se dice que $\bar{F}$ es diferenciable en $\bar{A}$ si:

$$\bar{F}(\bar{x}) = \bar{F}(\bar{A}) + D_F(\bar{A})(\bar{x} - \bar{A}) + \bar{E}(\bar{x})$$

$$\text{con } \lim_{\bar{x} \to \bar{A}} \frac{\|\bar{E}(\bar{x})\|}{\|\bar{x} - \bar{A}\|} = 0$$

Donde D_F es la matriz jacobiana de $\bar{F}$ en $\bar{A}$

- Obs.: f dif en $\bar{A}$ significa que $\bar{F}$ admite aproximacion de Taylor de 1er orden en $E(\bar{A})$

- Teorema dada $f: H \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, H abierto, $\bar{F} \in C^1$ en H entonces $\bar{F}$ es diferenciable en H

XVI. Demostracion $\bar{F}$ dif en $\bar{A} \Rightarrow \bar{F}$ continua

- Por hipotesis $\Rightarrow F(\bar{x}) = \bar{F}(\bar{A}) + D_F(\bar{A})(\bar{x}-\bar{A}) + \bar{\varepsilon}(\bar{x})$

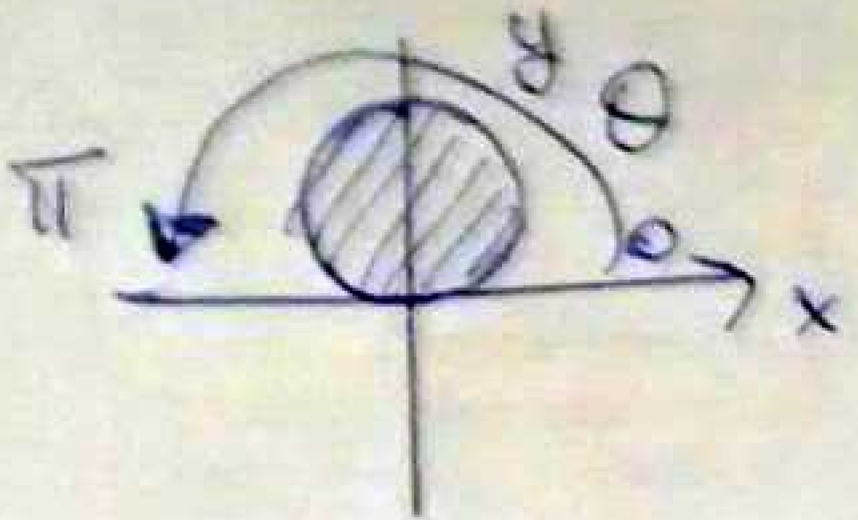
$$\lim_{\bar{x}\to\bar{A}} \frac{\|\bar{\varepsilon}(\bar{x})\|}{\|\bar{x}-\bar{A}\|} = 0$$

$$\text{Luego } \bar{F}(\bar{x}) = F(\bar{A}) + D\bar{F}(\bar{A})(\bar{x}-\bar{A}) + \frac{\bar{\varepsilon}(\bar{x})}{\|\bar{x}-\bar{A}\|}\|x-A\|$$

$$\text{Luego } \lim_{\bar{x}\to\bar{A}} \bar{F}(\bar{x}) = \underbrace{\lim_{\bar{x}\to\bar{A}} F(\bar{A})}_{F(A)} + \underbrace{\lim_{\bar{x}\to\bar{A}} D_F(\bar{A})(\bar{x}-\bar{A})}_{0} + \underbrace{\lim_{\bar{x}\to\bar{A}} \frac{\bar{\varepsilon}(\bar{x})}{\|x-A\|}\|x-A\|}_{0}$$

Resulta $\boxed{\lim_{\bar{x}\to\bar{A}} F(\bar{x}) = \bar{F}(\bar{A})}$

▸ Si La fn no es continua en $\bar{A}$ $\bar{F}$ no es diferenciable en $\bar{A}$



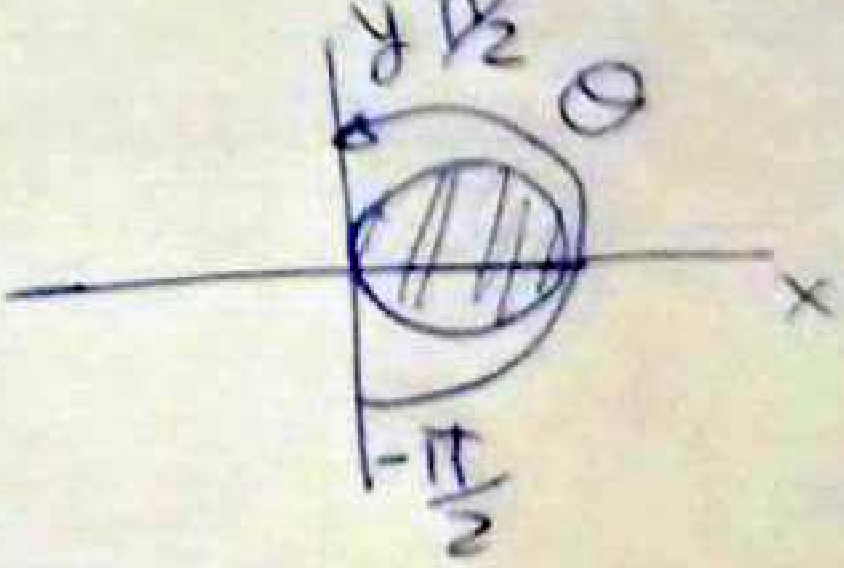
$x^2+y^2 \le 2y$

$\rho^2 \le 2\rho\cdot sen\theta \to y = \rho\, sen\theta$ > en polares

$0 \le \rho \le 2\, sen\theta$

$0 \le \theta \le \pi$

Si fuera → $x^2+y^2=2x$ ⇒



⇒ $0 \le \rho \le 2\cdot\cos\theta$

$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$