DERIVACIÓN DE FUNCIONES COMPUESTAS.

* 1) Dada la sup. S de ecuación $z = f(g(x,y))$ con f, g diferenciables. Halle una ecuac. para el plano tangente a S en $(1,2,4)$ sabiendo que $g'((1,2),(u,v)) = u-1$ y que $f'(g(1,2)) = 3$

* 2) Calcule en forma aproximada $h(1.02, 1.97)$ si $h = f \circ \bar{g}$ con $f(1,1) = 5$, $Df(x,y) = (2xy \quad x^2)$, $\bar{g}(u,v) = \left(u^2, \frac{v}{2}\right)$

* 3) Calcule el valor de la derivada direccional máxima de $h = f \circ \bar{g}$ en $(1,2)$ sabiendo que $Df(3,4) = (1, 6)$, $D\bar{g}(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\bar{g}(1,2) = (3,4)$.

* 4) Sea f diferenciable/ el plano tg de f en $(2,-1,f(2,-$ es $4x - 10y + 2z = 8$. Sea $g(u,v,w) = (u^2 + 3v + w^2, -3uv - w$ Halle la derivada direccional máxima de $h = f \circ g$ en $(1,-1,2)$. ¿En qué dirección se alcanza?

* 5) Suponiendo que se cumplen las hipótesis del teorem analice si la recta normal a la sup. de ecuación $z = f(\bar{g}(x,y))$ en el punto $\bar{A} = (1,2,1)$ intersecta al plano XZ. Se sabe que: $f(u,v) = uv + v^2$, $\bar{g}$ es diferenciable, $\bar{g}(1,2) = (0,1)$ y $D\bar{g}(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

* 6) Dada la sup Σ de ecuación $z = f(\bar{g}(x,y))$ con $f(u,v) = k^2 u + v$, $\bar{g}(x,y) = (x^2 - y, 2y - xy)$ con $k = cte$. Utilizando el teorema hallar $k > 0$ para que la recta normal a Σ en $(1,2,z_0)$ resulte paralela al eje Z.

24/05/01

Scanned by CamScanner

* 7) Dada $h = f \circ g$ / $h(x,y,z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$ analice si $\bar{A} \perp \bar{\nabla} h$. Suponga que $\bar{A} = (x_0, y_0, z_0)$ y se puede aplicar la regla de la cadena (deriv. func. comp.).

* 8) Sea $h = f \circ \bar{g}$ con $\bar{g}(x,y) = (xy, y-x)$. Si $Df(u,v) = (2uv \quad u^2)$. Calcule la derivada de h en $(1,2)$ en la dirección que va hacia el punto $(3,4)$

* 9) Sea $f \in C^1$, $h(x,y) = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$. Demuestre que $\bar{\nabla} h(x,y) \perp (x,y)$

* 10) Demuestre que $z = f(x-y, y-x)$ con $f \in C^1$ satisface $z'_x + z'_y = 0$

Scanned by CamScanner

DERIVADA DE FUNCIONES IMPLÍCITAS

*1) Sea $h = f \circ \bar{g}$ con $\bar{g}(x,y) = (xy, y-x)$, si la matriz jacobiana de f es $Df(u,v) = (2uv \quad u^2)$, calcule $h'((1,2); \vec{n})$ $\vec{n}$ dirección que va hacia el pto $(3,4)$.

*2) Analice si $z = f(x,y)$ queda definida implícitamente por $zx + \ln(z+y) = 0$ y si es solución de: $z'_x = z(y+z) \cdot z'_y$.

*3) Dada $z = x^3 + u^2$ con $u = f(x,y)$ def. implícitamente por $ux + \operatorname{sen}(x-y) - 2e^{u-2x} = 0$, resulta $z = h(x,y)$. Halle ecuac. para el π_{tg} a la sup. de ecuac. $z = h(x,y)$ en $\bar{A} = (1,1,z_0)$.

*4) Sea r_0 la recta normal a la sup. de ecuación $xy - z\ln(x) + ye^{z-1} - 4 = 0$ en $\bar{A} = (1,2,z_0)$. Halle el pto de intersección de r_0 con la sup. de ecuación $\bar{x} = (u-v, 2u, v)$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

*5) Calcule $z''_{yx}(2,0)$ cuando $z = f(x,y)$ queda definida implíc. por $x\ln(xz) + yz = 0$.

Scanned by CamScanner

DERIVADA DE FUNCIONES COMPUESTAS E IMPLÍCITAS

*1) Dada $w = u^2 \ln(2x-1)$ con $u = f(x,y)$ definida implícitamente por $uy + e^{u-x} = 2$, resulta $w = h(x,y)$. Determine la dirección de la mínima derivada direccional de h en $(1,1)$ y el valor de dicha derivada mínima.

*2) Dada $h = f \circ \bar{g}$ con $\bar{g}(x,y) = (x-y, y-x)$ y $f(u,v)$ def. implic. por $w - u + v + e^{w-u} = 0$. Determine la deriv. direcc. máxima de h en $\bar{A} = (2,1)$ y su valor.

*3) Dada $z = u e^{uv}$ con $u = f(x,y) \wedge v = g(x,y) /$ $(ux + ye^{u} - x - 1, v) = (0, xy^2)$ queda definida $z = h(x,y)$ en un $E(\bar{A})$ con $\bar{A} = (0,1)$. Halle $\check{r} /$ $h'(\bar{A}; \check{r}) = 0$.

*4) Dada $z = f(u,v)$ def. implícit. por: $uvz + \ln(z+v-3) =$ con $(u,v) = (xy^3, y+x^2)$ resulta $z = h(x,y)$. Calcule aproximadamente: $h(1.03, 0.97)$.

*5) Dada $f(x,y)$ def. implícitamente por: $x + z\ln(yz-5) + e^{xz} + xy - 1 = 0$. Calcule aproximadamente $f(0.3, 1.9)$.

Scanned by CamScanner

Fórmula de Taylor (1856-1915)

• Para funciones escalares

En **Análisis I**, se demostró que si una función y = f(x) es derivable hasta el orden (n+1), en un entorno de un punto a, dicha función se puede aproximar, en ese entorno, mediante un polinomio de grado n, escrito en potencias de (x -a) y se puede acotar el error que se comete cuando se toma como valor de f(x) con $x \in E(a, \delta)$, el valor que toma ese polinomio para la "x" considerada

En síntesis, en Análisis I se probó que si f(x) es derivable hasta el orden (n+1), en un entorno de un punto a, se cumple que:

$$\boxed{f(x)=f(a)+f'(a).(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x-a)^{(n)}+T_{n+1}}$$

T_{n+1} es el **Término complementario** o **Resto de Taylor**.

También se lo indica con R_n o Tc, y permite acotar el error que se comete cuando se toma como valor de la función, el del polinomio.

Existen distintas expresiones para el término complementario. Una de las más usuales es la de Lagrange:

$$T_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c).(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

donde c está entre x y a, es decir $x < c < a$ o bien $a < c < x$

Resulta:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{i}(a)}{i!}.(x-a)^{i} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(x-a)^{n+1} \quad \text{, con} \quad x < c < a$$

(Observación: Se considera que la derivada de orden 0 es la función)

B4|135|05

Scanned by CamScanner

Si a = 0, la fórmula de Taylor se conoce como fórmula de **Mac Laurin** (1698 - 1746).

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} . x^i + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{(n+1)} \quad , \text{ con } 0 < c < x$$

- **Para campos escalares de dos variables:**

Consideremos un campo escalar f: $A \to R$, con $A \subseteq R^2$, diferenciable hasta el orden (n+1) y (a,b) interior al conjunto A con $E(a,b) \subseteq A$.
Si (a+h,b+k) es un punto que pertenece al entorno, entonces la **Fórmula de Taylor** para dos variables permite hallar valores aproximados de f(a+h,b+k), conocidos los valores de f y de sus derivadas parciales sucesivas en el punto (a , b).

Recordatorio:
Por ser f(x,y) diferenciable hasta el orden (n+1), se cumplen las hipótesis del Teorema de Schwarz (1843 - 1921), entonces:

$$\boxed{f''_{xy}(a;b) = f''_{yx}(a;b)}$$

Puede demostrarse que la fórmula (1) es:

$$\boxed{f(a+h,b+k) = f(a,b) + f'_x(a,b).h + f'_y(a,b).k + \frac{1}{2!}.\left(f''_{xx}(a,b).h^2 + 2.f''_{xy}(a,b).h.k + f''_{yy}(a,b).k^2\right) + \ldots + T_{n+1}}$$

T_{n+1} es el **Término complementario o resto de Taylor.**

Para sintetizar la fórmula puede escribirse la misma utilizando los diferenciales.

Recordando que:

$$df\left[(a,b);(h,k)\right] = f'_x(a,b).h + f'_y(a,b).k$$

$$d^2f\left[(a,b);(h,k)\right] = f''_{xx}(a,b).h^2 + 2.f''_{xy}(a,b).h.k + f''_{yy}(a,b).k^2$$

$$d^3f\left[(a,b);(h,k)\right] = f'''_{xxx}(a,b).h^3 + 3.f'''_{xxy}(a,b).h^2.k + 3.f'''_{xyy}(a,b).h.k^2 + f'''_{yyy}(a,b).k^3$$

Scanned by CamScanner

Reemplazando en (1)

$$\boxed{f(a+h;b+k)=f(a;b)+df(a;b)+\frac{d^2f(a;b)}{2!}+\ldots+\frac{d^{(n)}f(a;b)}{n!}+T_{n+1}}$$

con : $T_{n+1}=\dfrac{d^{(n+1)}F(a;b)}{(n+1)!}$, con c / $0<c<1$.

Generalizando aún más la expresión se obtiene:

$$\boxed{f(a+h;b+k)=f(a;b)+\sum_{i=1}^{n}\frac{d^{(i)}f(a;b)}{i!}+\frac{d^{(n+1)}f(a+ch;b+ck)}{(n+1)!},\ \text{con } 0<c<1}$$

Si (a,b) = (0,0), se obtiene la **Fórmula de Mac Laurin**, en la que $h= x - 0 = x$
$k = y - b = y$

$$\boxed{f(x;y)=f(0;0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{d^{(i)}f(0;0)}{i!}+\frac{d^{(n+1)}f(cx;cy)}{(n+1)!},\ \text{con } 0<c<1}$$

- **Aplicaciones**

La fórmula de Taylor para dos variables permite, igual que la de una variable, aproximar funciones mediante un polinomio.
El error que se comete en dicha aproximación está dado por el término complementario.+
En el estudio de extremos condicionados de un campo escalar f(x,y) el signo del diferencial segundo de la fórmula de Taylor permite clasificar dichos extremos.

B4|B5|C7

Scanned by CamScanner

Extremos de campos escalares

Una superficie definida explícitamente por una ecuación de la forma z=f(x,y) puede considerarse como una superficie de nivel del campo escalar F definido por la ecuación:

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z$$

Si f es diferenciable, el gradiente de ese campo viene dado por el vector

$$\overline{\nabla} F = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j - k$$

La ecuación lineal que permite calcular el plano tangente en un unto P=(a,b,c) puede escribirse en la forma:

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c).(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c).(y-b)$$

Cuando los dos coeficientes o derivadas parciales son nulos en el punto P, a dicho punto se lo llama **punto estacionario** o **crítico** de la función f. El plano tangente en un punto estacionario es horizontal.
Generalmente los puntos estacionarios de una superficie se clasifican en tres categorías: máximos, mínimos y puntos de ensilladura.

Si la superficie se imagina como un terreno montañoso, estas categorías corresponden, respectivamente, a las cumbres, a los fondos de los valles y a los puertos.

Los conceptos de máximos, mínimos y puntos de ensilladura, se pueden introducir para campos escalares definidos en subconjuntos A de R^n.

Definiciones

Consideremos f: $A \to R$, con $A \subseteq R^2$, siendo A abierto y $\vec{P}_0\ (x_0;y_0) \in A$

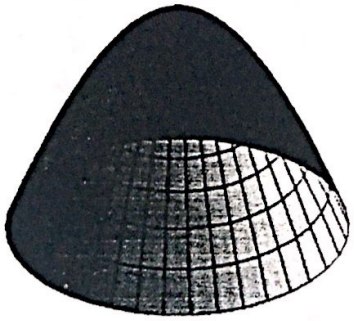
* **Definición: 1**

$f(\vec{P}_0)$ es un **máximo absoluto** o **global** de f $\Leftrightarrow \forall\ \vec{X} \in A:\ f(\vec{X}) \leq f(\vec{P}_0)$

Scanned by CamScanner

$f(\vec{P}_0)$ es un **máximo relativo** o **local** de f $\Leftrightarrow \exists\delta>0/\ \forall \vec{X} \in E[\vec{P}_0,\delta] : F(\vec{X}) \leq F(\vec{P}_0)$

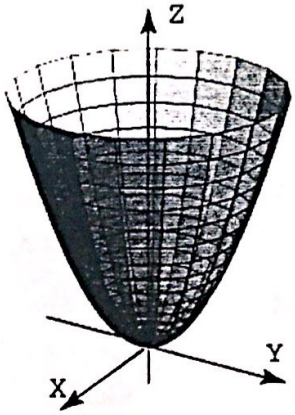
Dicho de otro modo, un máximo relativo en $\vec{P}_0$ es el máximo absoluto en un cierto entorno de $\vec{P}_0$.



* **Definición: 2**

$f(\vec{P}_0)$ es un **mínimo absoluto** o **global** de f $\Leftrightarrow \forall\ \vec{X} \in A :\ f(\vec{X}) \geq f(\vec{P}_0)$

$f(\vec{P}_0)$ es un **mínimo relativo** o **local** de f $\Leftrightarrow \exists\ \delta>0/\forall \vec{X} \in E[\vec{P}_0,\delta]: f(\vec{X}) \geq f(\vec{P}_0)$



* **Definición: 3**

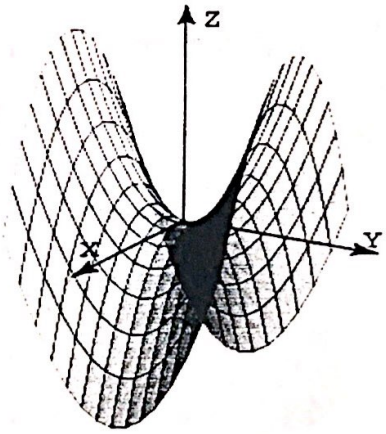
$(x_0;y_0 ;\ f(x_0 ;y_0))$ es un **punto de ensilladura** o **punto silla** de f en A $\Leftrightarrow$ f es diferenciable en $\vec{P}_0$ y el plano tangente atraviesa la superficie representativa de f.

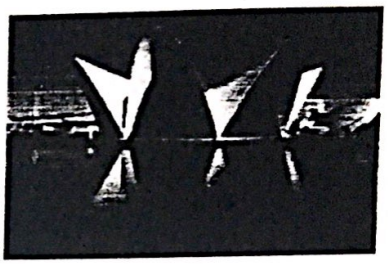
Es decir:
$(x_0 ;y_0;f(x_0 ;y_0))$ es un **punto de ensilladura** de f en A $\Leftrightarrow$ f es diferenciable en $\vec{P}_0 \wedge$ $\forall\ \delta > 0$:

B4/135/09

Scanned by CamScanner

$$[\exists\, \bar{X} \in E[\bar{P}_0,\delta] \,/\, f(\bar{X}) \geq f(\bar{P}_0) \wedge \exists\, \bar{X}' \in E[\bar{P}_0,\delta] \,/\, f(\bar{X}') \leq f(\bar{P}_0)]$$

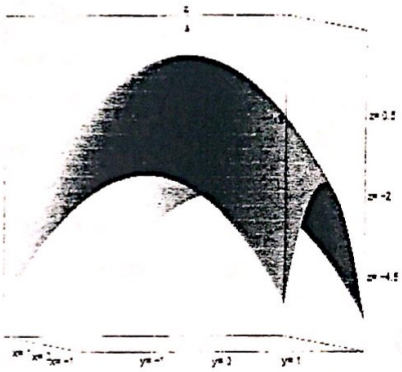




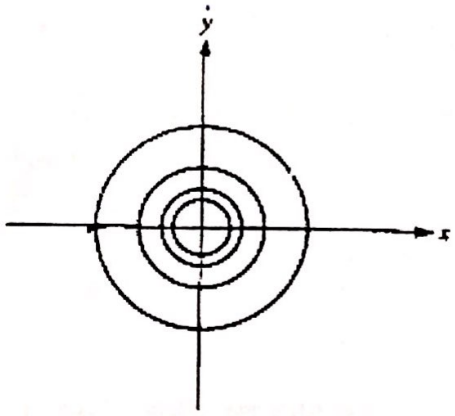
Ejemplos

Ejemplo: 1 Máximo relativo

Sea $z = f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$. Esta superficie es un paraboloide de revolución. En las proximidades del origen tiene la forma indicada en la siguiente figura a) y sus curvas de nivel son círculos, alguno de los cuales está dibujado en la figura b).



a) $z = 2 - x^2 - y^2$



b) Curvas de nivel $x^2 + y^2 = c$

f tiene en (0,0) un máximo relativo, pero también un máximo absoluto en todo conjunto que contenga el origen.

Las dos derivadas parciales se anulan en el origen.

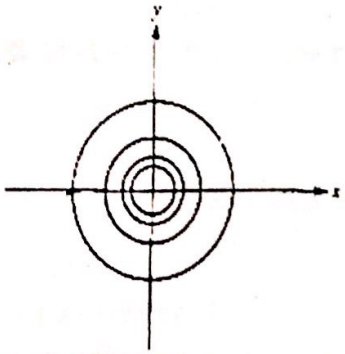
Ejemplo: 2 Mínimo relativo

Sea $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Este ejemplo, otro paraboloide de revolución, es en esencia el mismo que el ejemplo anterior, salvo que en el origen hay un mínimo en lugar de un máximo.

Scanned by CamScanner

El aspecto de la superficie en las cercanías del origen se aprecia en la figura c) y algunas curvas de nivel están dibujadas en la figura b)

c) $z = x^2 + y^2$



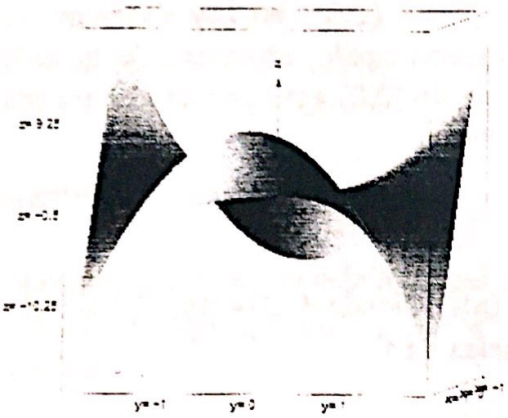
b) Curvas de nivel $x^2 + y^2 = c$

Ejemplo: 3 Punto de ensilladura

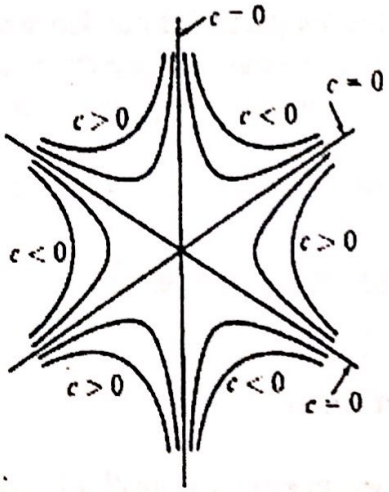
Sea $z = f(x, y) = X^3 - 3xy^2$. Cerca del origen, esta superficie tiene el aspecto de un puerto de montaña entre tres picos.

Está representada en la figura d) y algunas curvas de nivel se ven en la figura e).

El punto de ensilladura está en el origen.



d) $z = x^3 - 3xy^2$



f) Curvas de nivel $x^3 - 3xy^2 = c$

* **Definición: 4**

Un punto que sea máximo relativo o mínimo relativo de f se llama **extremo** de f.

B4/135/44

Scanned by CamScanner

Condiciones necesaria y sufieciente para la existencia de extremos

1. Para campos escalares de dos variables

Condición necesaria

Si f(x,y) tiene un extremo en un punto interior $\bar{P}_0$ $(x_0;y_0)$ y es diferenciable en él, todas las derivadas parciales de primer orden deben ser cero.
Es decir:

$$\overline{\nabla} f(\overline{P}_0) = \overline{0}$$

Gráficamente significa que hay un plano horizontal tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $\bar{P}_0$.

Observación

Las derivadas parciales pueden anularse en un determinado punto pero no ser dicho punto un extremo. Por ejemplo: $z = x^2 - y^2$. En (0;0) no hay extremo, el plano tangente , (que existe pues la función es diferenciable) atraviesa la superficie de modo que para algunos puntos de un entorno de (0;0) está por debajo y para otros por arriba. Se trata de un **punto de ensilladura.**

Enunciado y demostración

Consideremos $f: A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ / $z = f(x;y)$, siendo A abierto, $\bar{P}_0$ $(x_0;y_0) \in A$ un punto en el que existen las derivadas parciales de f .

Si $f(\bar{P}_0)$ es un extremo local de f $\Rightarrow \overline{\nabla} f(\overline{P}_0) = \overline{0}$, es decir: $f'_x(\bar{P}_0) = f'_y(\bar{P}_0) = 0$

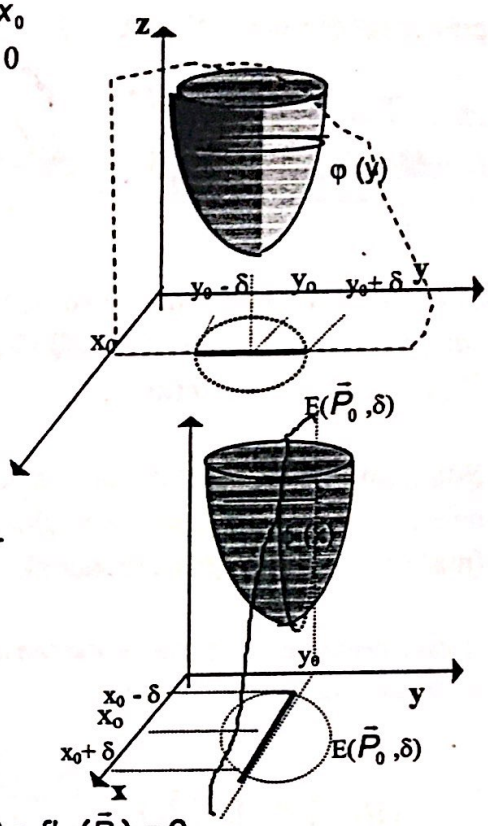
Supongamos que $f(\bar{P}_0)$ es un mínimo local, es decir, por definición :

$$\exists\, \delta > 0 / \forall \bar{X} \in E[\bar{P}_0, \delta] : f(\bar{X}) \geq f(\bar{P}_0)$$

Cortemos la superficie representativa de f con el plano $x = x_0$. La intersección es una curva sobre ese plano cuya ecuación es de la forma $\begin{cases} z = \varphi(y) \\ x = x_0 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

El intervalo $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, sobre la recta $\begin{cases} x = x_0 \\ z = 0 \end{cases}$



está incluido en $E[\bar{P}_0, \delta]$, luego:

$f(x_0; y) \geq f(x; y), \forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$

Es decir:

$\varphi(y) \geq \varphi(y_0), \forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$

Por lo tanto $\varphi(y_0)$ es un mínimo relativo de $\varphi(y)$ y debe cumplirse la condición necesaria para la existencia de extremos en funciones escalares: $\varphi'(y_0) = f'_y(\bar{P}_0) = 0$.

De la misma forma, si se corta la superficie con el plano $y = y_0$, se obtiene una curva de ecuación $\begin{cases} z = \phi(x) \\ y = y_0 \end{cases}$ que presenta un mínimo relativo en $\phi(x_0)$ y por lo tanto: $\phi'(x_0) = f'_x(\bar{P}_0) = 0$

Teorema

Si $f: A \to R$, con $A \subseteq R^n$, siendo A abierto, $\bar{P}_0 \in A$, f admite derivada direccional en $\bar{P}_0$ y $\bar{P}_0$ es extremo local de $f \Rightarrow f'(P_0; \breve{u}) = 0, \quad \forall \breve{u}$.

Demostración)

Supongamos que $\bar{P}_0$ es un máximo local de $f \Rightarrow f(P_0) \geq f(P_0 + h.\breve{u}) \Rightarrow f(P_0 + h.\breve{u}) \quad f(P_0) \leq 0$.
Dividiendo miembro a miembro por "h" escalar, el cual puede se positivo o negativo, se obtiene:

$$* \text{ Si } h \ 0 \Rightarrow \frac{f(P_0 + h.\breve{u}) \quad f(P_0)}{h} \leq 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{f(P_0 + h.\breve{u}) \quad f(P_0)}{h} \leq 0 \quad \textbf{(A)}$$

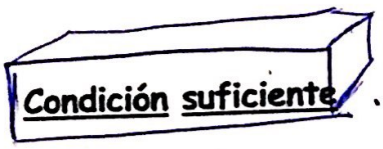
$$* \text{ Si } h \ 0 \Rightarrow \frac{f(P_0 + h.\breve{u}) \quad f(P_0)}{h} \geq 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + h.\breve{u}) \quad f(P_0)}{h} \geq 0 \quad \textbf{(B)}$$

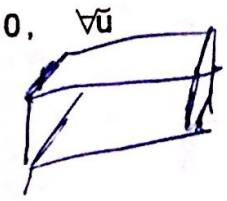
Por hipótesis existe la derivada direccional en cualquier dirección por lo cual el límite **(A)** debe coincidir con el límite **(B)** $\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + h.\breve{u}) \quad f(P_0)}{h} = 0$.

B4/135/12

Scanned by CamScanner

En consecuencia: $f'(P_0;\breve{u})=0, \quad \forall \breve{u}$





Pero $F''_{xx}(P_0)$

Condición suficiente.

El criterio a desarrollar para determinar la naturaleza del punto estacionario, para campos escalares de 2 variables, es mediante el signo de la derivada segunda $f''_{xx}(\vec{P}_0)$ y del **hessiano** en $\vec{P}_0$.

Sea f un campo escalar de dos variables con derivadas parciales continuas hasta el segundo orden, llamamos **Hessiano** de f en $\vec{P}_0$ al determinante de la matriz hessiana (matriz de derivadas segundas).

Dicho nombre se debe al matemático alemán Ludwig Otto Hesse (1811-1874) y se especifica a continuación.

$$H(\vec{P}_0) = \left|Df(\vec{P}_0)\right| = \begin{vmatrix} f''_{xx}(\vec{P}_0) & f''_{xy}(\vec{P}_0) \\ f''_{xy}(\vec{P}_0) & f''_{yy}(\vec{P}_0) \end{vmatrix} = f''_{xx}(\vec{P}_0).f''_{yy}(\vec{P}_0) - f''^{2}_{xy}(\vec{P}_0)$$

<u>Teorema</u>

Consideremos f: $A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, y un punto $\vec{P}_0 \in A$.
Si se verifica que:

i) f tiene derivadas parciales hasta el segundo orden continuas en un entorno de $\vec{P}_0$

ii) $f'_x(\vec{P}_0) = f'_y(\vec{P}_0) = 0$

iii) las derivadas segundas de f en $\vec{P}_0$ no son simultáneamente nulas, suponemos $f''_{xx}(\vec{P}_0) \neq 0$)

Entonces:

a) Si $H(\vec{P}_0)>0$, entonces $f(\vec{P}_0)$ es un **extremo relativo** y :

$$\begin{cases} \text{Si } f''_{xx}(\vec{P}_0) < 0 \Rightarrow f(x_0,y_0) \text{ es un } \textbf{máximo relativo.} \\ \text{Si } f''_{xx}(\vec{P}_0) > 0 \Rightarrow f(x_0,y_0) \text{ es un } \textbf{mínimo relativo.} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

b) Si $H(\bar{P}_0) < 0$, entonces $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es un punto de ensilladura.

c) Si $H(\bar{P}_0) = 0$, no puede obtenerse ninguna conclusión por este método.

2. Para campos escalares de tres variables

Sea $f: A \subseteq R^3 \to R$ con derivadas parciales continuas en un entorno de $\bar{P}_0$ tal que $\bar{P}_0 \in A$.

Condición necesaria

Si $f(\bar{P}_0)$ es un extremo relativo o local de f $\Rightarrow$ $\nabla f(\bar{P}_0) = \bar{0}$

Condición suficiente

Se definen los siguientes hessianos:

$$H_1 = f''_{xx} \qquad H_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} \qquad H_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix}$$

Si $\bar{P}_0$ es un punto que cumple la condición necesaria para la existencia de extremos relativos y las derivadas segundas de f no son simultáneamente nulas en $\bar{P}_0$, entonces si:

a) $H_1(\bar{P}_0) > 0 \wedge H_2(\bar{P}_0) > 0 \wedge H_3(\bar{P}_0) > 0 \Rightarrow f(\bar{P}_0)$ es Mínimo Relativo.

b) $H_1(\bar{P}_0) < 0 \wedge H_2(\bar{P}_0) > 0 \wedge H_3(\bar{P}_0) < 0 \Rightarrow f(\bar{P}_0)$ es Máximo Relativo.

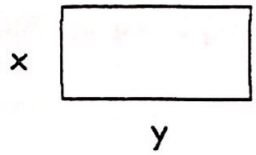
B4/135/5

Scanned by CamScanner

Extremos Condicionados

• Introducción

Un problema clásico, es hallar un polígono de área máxima, con perímetro constante. Por ejemplo, hallar el rectángulo de mayor área, con perímetro 100 cm.
Para la resolución del mismo y teniendo en cuenta la figura de análisis se plantea que:



Área del rectángulo = $A = x \cdot y$

Perímetro del rectángulo = $P = 2x+2y=100$

Se desea encontrar la medida de los lados que maximicen el área considerando el perímetro dado. Para lo cual puede hallarse una de las variables en función de la otra de la función perímetro y reemplazarla en la función área. Luego buscar el o los puntos críticos de la misma y clasificarlos. La solución será el "x" e "y" que maximicen dicha área.
Como:

$$2x+2y=100$$
$$2x=100-2y$$
$$x=50-y \qquad (1)$$

Entonces:

$$A=(50-y).y$$
$$A=50y-y^2$$

La función quedó dependiendo, en este caso, de la variable "y". Para hallar sus puntos críticos debe derivarse e igualarse a cero, por lo visto en análisis I.

$$A'(y)=50-2y=0$$
$$50=2y$$
$$25=y$$

Para clasificar dicho valor y constatar que es el que maximiza el área se utiliza, por ejemplo, el criterio de la derivada segunda.
$A''(y)=-2 \Rightarrow y=25$ maximiza el área. El respectivo valor de "x", por (1) es: $x = 25$.
Es decir que el rectángulo de mayor área y perímetro 100 es aquel cuya base mide 25 cm y altura 25 cm y viceversa. El valor de dicha área es 625 cm^2.

Scanned by CamScanner

Como puede observarse en el ejemplo hay una relación entre dos funciones. Una de ellas la que se desea maximizar o minimizar (en el ejemplo expuesto el Área) y otra que es la restricción o vínculo (el Perímetro).
Sin embargo, en muchos casos, las condiciones de vínculo no permiten despejar unas variables en función de otras. Por ello se busca un método que pueda utilizarse también cuando las condiciones de vínculo solamente definen funciones en forma implícita.

En el ejemplo propuesto llamaremos F(x,y) a la función de dos variables área que se desea maximizar y G(x,y)=0 a la condición de vínculo perímetro.
O sea:

$$F(x,y) = x \cdot y$$
$$G(x,y) = 2x+2y-100=0$$

Esto significa que se desea hallar los extremos de una función F de dos variables condicionadas o sujetas a la restricción G(x,y)=0.
Con frecuencia los problemas de extremos condicionados son muy difíciles; no se conoce un método general para resolverlos.
Se utilizan métodos particulares, como el aplicado para el ejemplo expuesto, cuando la función de vínculo tiene una estructura sencilla.
A continuación se expone el método conocido como:

Multiplicadores de Lagrange.

- **Método de los multiplicadores de Lagrange** (1736-1813)

1. Para campos escalares de dos variables

Sean F(x,y) y G (x,y) dos campos escalares de dos variables con derivadas parciales continuas, tales F(x,y) tiene un extremo relativo $F(x_0,y_0)$ cuando (x,y) está sujeto a la restricción G(x,y) = 0.

Si $\vec{\nabla} G(x_0,y_0) \neq \vec{0}$, entonces existe un número real λ tal que:

$$\boxed{\vec{\nabla} F(x_0,y_0) = \lambda . \vec{\nabla} G\ (x_0,y_0)}$$

Definimos la función de Lagrange: $\boxed{L(x,y,\lambda) = F(x,y) + \lambda\, G(x,y)}$, resulta que existe $\lambda_0 \in R/$

$$\vec{\nabla} L(x_0,y_0,\lambda_0) = \vec{0} \quad (2)$$

El número λ se denomina multiplicador de Lagrange y la expresión (2) es la denominada **Condición Necesaria.**

Scanned by CamScanner

Si $F(x,y)$ sujeta a la restricción $G(x,y) = 0$ tiene un extremo en (x_0,y_0), entonces (x_0,y_0) debe ser solución de (2). Por lo tanto para encontrar los extremos se deben encontrar los valores de x e y que para algún valor de λ verifican tales ecuaciones.

Nota: El método puede utilizarse cuando $F(x,y)$ está sujeta a más de una restricción; en este caso la función de Lagrange es:

$$\boxed{L(x,y,\lambda_1;\lambda_2)=F(x,y)+\lambda_1 G_1(x,y)+\lambda_2 G_2(x,y)}$$

Los puntos de la forma (x_0,y_0,λ_0), obtenidos como solución del sistema:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = F'_x(x,y) + \lambda \,.\, G'_x(x,y) = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = F'_y(x,y) + \lambda \,.\, G'_y(x,y) = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = G(x,y) = 0 \end{cases}$$

constituyen los posibles extremos de la función $L(x,y,\lambda)$ y en consecuencia extremos posibles de $F(x,y)$ sujeta a $G(x,y)=0$.

Una vez hallados debe comprobarse que son extremos mediante dos posibles métodos o **Condición Suficiente:**

a) Analizando el signo del $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)$.

* Si $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0) > 0$, en (x_0,y_0) hay un mínimo condicionado.

* Si $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0) < 0$, en (x_0,y_0) hay un máximo condicionado.

* Si $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0) = 0$, el criterio "no concluye".
  Se lo analiza con un diferencial de orden superior.

¡Ojo!

Debe tenerse en cuenta que $G(x,y)=0$ por lo cual $G'_x(x,y).dx + G'_y(x,y) = 0$ al momento de analizar el signo de "dx" y "dy".

Scanned by CamScanner

b) Analizando el signo del **Hessiano Orlado**, es decir del determinante de la matriz hessiana de la función de Lagrange.

$$H^*(x,y,\lambda) = \overline{H}(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & G'_x \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial^2 y} & G'_y \\ G'_x & G'_y & 0 \end{vmatrix} \quad \text{en } (x_0, y_0, \lambda_0).$$

* Si $H^*(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, entonces $F(x_0, y_0)$ es Máximo local de F sujeta a G.

* Si $H^*(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, entonces $F(x_0, y_0)$ es Mínimo local de F sujeta a G.

* Si $H^*(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, entonces el criterio "no concluye".

2. Para campos escalares de tres variables

Condición necesaria

Sean $F(x,y,z)$ y $G(x,y,z)$ dos campos escalares de tres variables con derivadas parciales continuas, tales $F(x,y,z)$ tiene un extremo relativo $F(x_0,y_0,z_0)$ cuando (x,y,z) está sujeto a la restricción o condición de vínculo $G(x,y,z) = 0$.

La función de Lagrange resulta:

$$\boxed{L(x,y,z,\lambda) = F(x,y,z) + \lambda . G(x,y,z)}$$

La condición necesaria para que $F(x_0, y_0, z_0)$ con λ_0 sea un extremo es que

$$\boxed{\overline{\nabla} L(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = \overline{0}}$$

Scanned by CamScanner

Condición suficiente

Para un campo escalar $F : A \subseteq R^3 \to R$, sujeto a la condición $G(x,y,z) = 0$.

Se definen los **Hessianos Orlados:**

$$\overline{H}_4(x,y,z,\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} & G'_x \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} & G'_y \\ \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} & G'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z & 0 \end{vmatrix} \qquad \overline{H}_3(x;y;\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & G'_x \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & G'_y \\ G'_x & G'_y & 0 \end{vmatrix}$$

* Si $H_4(x_0;y_0;z_0;\lambda_0) < 0 \ \wedge \ H_3(x_0;y_0;\lambda_0) < 0$ entonces F $(x_0; y_0; z_0)$ es Mínimo local de F sujeto a G.

* Si $H_4(x_0;y_0;z_0;\lambda_0) < 0 \ \wedge \ H_3(x_0;y_0;\lambda_0) > 0$ entonces F $(x_0; y_0; z_0)$ es Máximo local de F sujeto a G.

* Si $H_4(x_0;y_0;z_0;\lambda_0) > 0$ entonces F no presenta un extremos en $(x_0; y_0; z_0)$.

* Si $H_4(x_0;y_0;z_0;\lambda_0) = 0$ entonces no se puede concluir acerca del punto $(x_0; y_0; z_0)$.

B41.:::/21

Scanned by CamScanner