1. Puntos Regulares

1.1. De una Curva

Sea $\overline{g} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una función continua en D tal que $\overline{g}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$. Si $\overline{g}$ es diferenciable en t_0 (interior a D) y $\overline{g}'(t_0) \neq \overline{0}$ entonces el punto $x_0 = \overline{g}(t_0)$ de la curva imagen de $\overline{g}$ se llama punto regular, según la representación dada por $\overline{g}$ en D.

1.2. De una superficie

Sea $\overline{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en D, con $\overline{F}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$. Si $\overline{F}$ es diferenciable en $p = (u_0, v_0)$ interior a D y $\frac{\partial \overline{F}}{\partial u}(p) \times \frac{\partial \overline{F}}{\partial v}(p) \neq \overline{0}$, entonces el punto de la superficie $x_0 = \overline{F}(p)$ se llama punto regular según la representación dada por $\overline{F}$ en D.

Observación: La superficie es la representación del conjunto imagen del campo vectorial.

2. Propiedades de los campos diferenciables

2.1. Continuidad de f

Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\overline{x}_0$ interior a D_f, entonces f es continua en $\overline{x}_0$.

Demostración: Por ser f diferenciable en $\overline{x}_0$, existe un entorno del punto $\overline{x}_0$ en el cual se verifica:

$$f(\overline{x}_0 + \overline{v}) - f(\overline{x}_0) = \nabla f(\overline{x}).\overline{v} + \varepsilon(\overline{v}).||\overline{v}||$$

donde $\overline{v}$ es el vector incremento y $\lim\limits_{\overline{v} \to \overline{0}} \varepsilon(\overline{v}) = 0$. Haciendo un pasaje de términos:

$$f(\overline{x}_0 + \overline{v}) = f(\overline{x}_0) + \nabla f(\overline{x}).\overline{v} + \varepsilon(\overline{v}).||\overline{v}||$$

Si te toma límite a ambos miembros de la igualdad con $\overline{v} \to \overline{0}$, el límite del primer miembro existirá si existe el del segundo. Entonces, la expresión que resulta es:

$$\lim_{\overline{v} \to \overline{0}} f(\overline{x}_0 + \overline{v}) = \lim_{\overline{v} \to \overline{0}} \big(f(\overline{x}_0) + \nabla f(\overline{x}).\overline{v} + \varepsilon(\overline{v}).||\overline{v}||\big)$$

Se sabe que $\overline{x}_0 \in D_f$ y que $\lim\limits_{\overline{v} \to \overline{0}} f(\overline{x}_0) = f(\overline{x}_0)$, ya que $f(\overline{x}_0)$ es un número real.

Por otra parte, las componentes de $\nabla f(\overline{x}_0)$ existen dado que f es diferenciable en $\overline{x}_0$ y no dependen de $\overline{v}$. Entonces $\lim\limits_{\overline{v} \to \overline{0}} \big(\nabla f(\overline{x}).\overline{v}\big) = 0$.

Por último, $\lim\limits_{\overline{v} \to \overline{0}} \big(\varepsilon(\overline{v}).||\overline{v}||\big) = 0$ dado que $\varepsilon \to 0$ por hipótesis y que $\lim\limits_{\overline{v} \to \overline{0}} ||\overline{v}|| = 0$.

Porque todos los límites existen y son finitos, se puede aplicar el álgebra de límites, y la expresión resultante es:

$$\lim_{\overline{v}\to\overline{0}} f(\overline{x}_0+\overline{v}) = f(\overline{x}_0)$$

$\therefore$ **f es continua en $\overline{x}_0$.**

2.2. Derivabilidad de f en toda dirección

Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\overline{x}_0$ interior a D_f, entonces f es derivable en $\overline{x}_0$ respecto de toda dirección.

Demostración: Por ser f diferenciable en $\overline{x}_0$, existe un entorno del punto $\overline{x}_0$ en el cual se verifica:

$$f(\overline{x}_0+\overline{v}) - f(\overline{x}_0) = \nabla f(\overline{x}).\overline{v} + \varepsilon(\overline{v}).||\overline{v}||$$

donde $\overline{v}$ es el vector incremento y $\lim\limits_{\overline{v}\to\overline{0}} \varepsilon(\overline{v}) = 0$.

Si de los infinitos puntos del entorno seleccionamos aquellos para los cuales $\overline{v} = h\check{u}$, es decir, se consideran los puntos que se hallan en las rectas que pasan por $\overline{x}_0$ y tienen la dirección de cada $\check{u}$. Se tiene entonces:

$$f(\overline{x}_0+h\check{u}) - f(\overline{x}_0) = \nabla f(\overline{x}).h\check{u} + \varepsilon(h\check{u}).||h\check{u}||$$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad por h, resulta la expresión:

$$\frac{f(\overline{x}_0+h\check{u}) - f(\overline{x}_0)}{h} = \nabla f(\overline{x}).\check{u} + \varepsilon(h\check{u}).\frac{|h|}{h}, \text{ pues } ||\check{u}|| = 1$$

Si se toma límite con $h \to 0$ a ambos miembros de la igualdad. El límite del primer miembro (es por definición la derivada direccional de f en $\overline{x}_0$) existe si existe el límite del segundo miembro. Entonces, de

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(\overline{x}_0+h\check{u}) - f(\overline{x}_0)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\nabla f(\overline{x}).\check{u} + \varepsilon(h\check{u}).\frac{|h|}{h}\right)$$

se puede afirmar que $\lim\limits_{h\to 0}(\nabla f(\overline{x}).\check{u}) = k \in \mathbb{R}$, siendo k el que surge de $\nabla f(\overline{x}).\check{u}$. Las componentes de $\nabla f(\overline{x}_0)$ existen dado que f es diferenciable en $\overline{x}_0$ y no dependen de h, por lo tanto
$\lim\limits_{h\to 0}(\nabla f(\overline{x}).\check{u}) = k$

Por otra parte, el $\lim\limits_{h\to 0}\left(\varepsilon(h\check{u}).\frac{|h|}{h}\right) = 0$ por ser el caso del producto entre el infinitésimo ε y la función acotada $\frac{|h|}{h} = 0$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(\overline{x}_0+h\check{u}) - f(\overline{x}_0)}{h}\right) = f'(\overline{x}_0,\check{u}) = \nabla f(\overline{x}).\check{u} \quad \forall \check{u} \in \mathbb{R}^n$$

3. Extremos de de campos escalares

3.1. Extremos relativos o locales

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (con $n \geqslant 2$), siendo D un conjunto abierto tal que $D \subseteq \mathbb{R}^n$, y sea $\overline{x}_0 \in D$.

3.1.1. Máximos

Se define (en sentido estricto) a $f(\overline{x}_0)$ como máximo relativo de f en D si y sólo si $\exists\, E(\overline{x}_0) \subset D$ tal que $\forall \overline{x} \in E(\overline{x})$ ocurre que $f(\overline{x}_0) > f(\overline{x})$.

En cambio, se define (en sentido amplio) que $f(\overline{x}_0)$ es máximo relativo de f en D si y sólo si $\exists\, E(\overline{x}_0) \subset D$ tal que $\forall \overline{x} \in E(\overline{x})$ ocurre que $f(\overline{x}_0) \geqslant f(\overline{x})$.

3.1.2. Mínimos

Se define (en sentido estricto) a $f(\overline{x}_0)$ como mínimo relativo de f en D si y sólo si $\exists\, E(\overline{x}_0) \subset D$ tal que $\forall \overline{x} \in E(\overline{x})$ ocurre que $f(\overline{x}_0) < f(\overline{x})$.

En cambio, se define (en sentido amplio) que $f(\overline{x}_0)$ es máximo relativo de f en D si y sólo si $\exists\, E(\overline{x}_0) \subset D$ tal que $\forall \overline{x} \in E(\overline{x})$ ocurre que $f(\overline{x}_0) \leqslant f(\overline{x})$.

3.2. Extremos absolutos

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (con $n \geqslant 2$), siendo D un conjunto abierto tal que $D \subseteq \mathbb{R}^n$, y sea $\overline{x}_0 \in D$.

3.2.1. Máximo

Se define a $f(\overline{x}_0)$ como un máximo absoluto de f en un conjunto $R \subset D$ si y sólo si $\forall \overline{x} \in R : f(\overline{x}) \leqslant f(\overline{x}_0)$.

3.2.2. Mínimo

Se define a $f(\overline{x}_0)$ como un mínimo absoluto de f en un conjunto $R \subset D$ si y sólo si $\forall \overline{x} \in R : f(\overline{x}) \geqslant f(\overline{x}_0)$.