DISTANCIA. ESPACIOS MÉTRICOS

Distancia:

Dado un espacio no vacío E, se llama ***distancia*** a toda función d:ExE→R que verifique las siguientes condiciones:

i) La distancia entre dos puntos cualesquiera del espacio es no negativa .

$\forall A,\forall B:(A\in E\wedge B\in E\Rightarrow d(A,B) \geq 0)$

ii) La distancia entre dos puntos es cero si y sólo si los puntos son coincidentes.

$\forall A,\forall B:(A\in E\wedge B\in E \Rightarrow [d(A,B)=0 \Leftrightarrow A = B])$

iii) Verifica la propiedad simétrica.

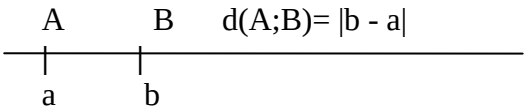
$\forall A,\forall B: (A\in E\wedge B\in E \Rightarrow d(A,B)= d(B,A))$

iv) Verifica la propiedad triangular.

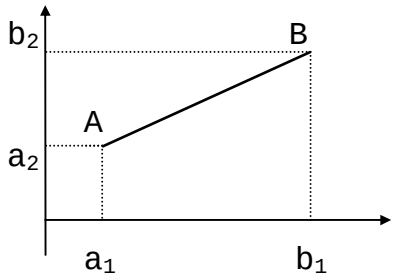
$(\forall A,\forall B, \forall C : A\in E\wedge B\in E \wedge C\in E \Rightarrow d(A,B) + d(B,C) \geq d(A,C)$

<u>Definición de distancia en los conjuntos numéricos más usuales</u>

I.- en R



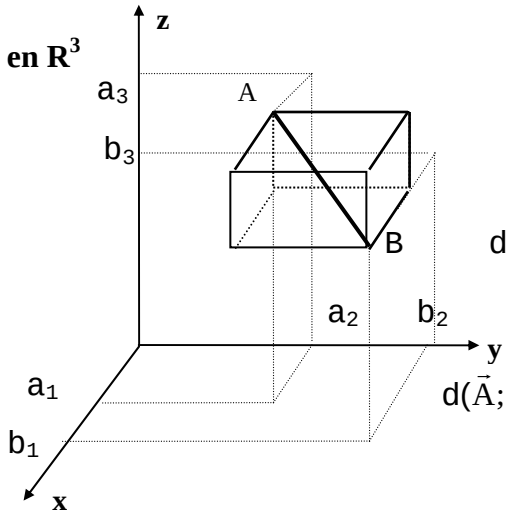
II.- en R^2



Si $\vec{A} = (a_1; a_2)$ y $\vec{B} =(b_1;b_2)$

$d(\vec{A};\vec{B})= |\vec{AB}| =\sqrt{(b_2-a_2)^2+(b_1-a_1)^2}$

III.- en R^3



Si $\vec{A} = (a_1;a_2;a_3)$ y $\vec{B} =(b_1;b_2;b_3)$

$d(\vec{A};\vec{B}) = |\vec{AB}|$

$d(\vec{A};\vec{B})=\sqrt{(a_3-b_3)^2+(a_2-b_2)^2+(a_1-b_1)^2}$

IV.- en R^n

Si $\vec{A} = (a_1;a_2;a_3;...;a_n)$ y $\vec{B} =(b_1;b_2;b_3;....b_n)$, resulta $d(\vec{A};\vec{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}$

Espacio Métrico

Todo conjunto no vacío, espacio, entre cuyos elementos se ha definido una **DISTANCIA**, se denomina **ESPACIO MÉTRICO.**

TOPOLOGÍA EN R^n

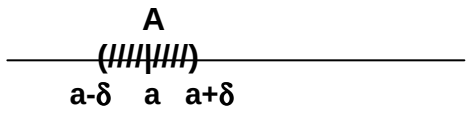
Entorno de un punto:

*Si **A** es un punto de un espacio métrico **M**, se llama **entorno simétrico** de **A** de **radio o amplitud** δ al conjunto de puntos del espacio que se encuentran a una distancia de A menor que* δ

$$E(A;\delta) = \{ X \in M \,/\, d(X;A) < \delta \}$$

***Entornos en los conjuntos numéricos más usuales*.**

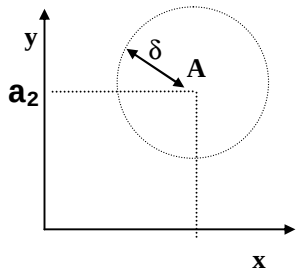
I.- en R



$$E(A;\delta)=\{ x \in R \,/\, | x - a | < \delta\}$$

II.- en R^2

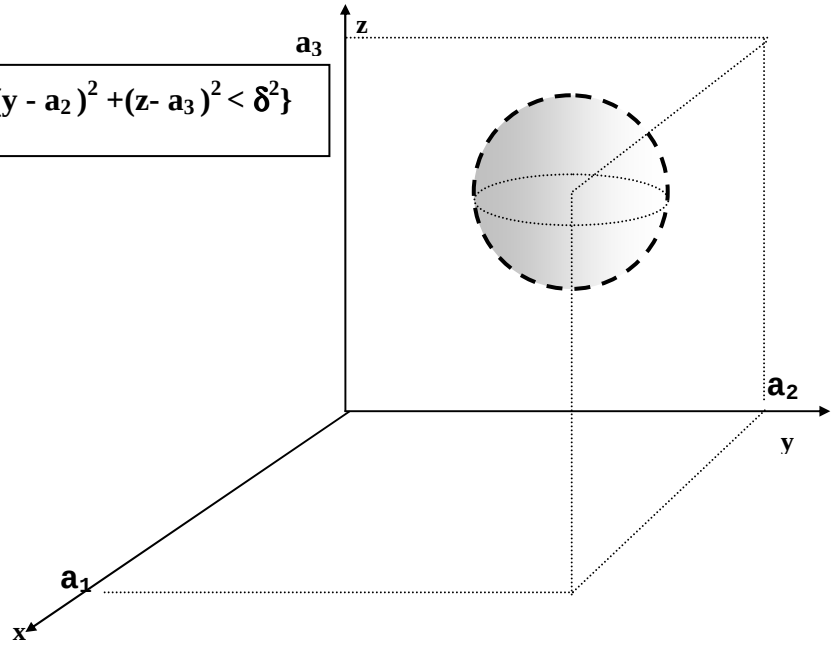
$\vec{A} = (a_1;a_2)$



$$E(\vec{A};\delta)=\{(x;y) \in R^2 \,/\, (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < \delta^2\}$$

III.- en R^3

$$E(\vec{A};\delta)=\{(x;y;z) \in R^3 \,/\, (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 < \delta^2\}$$



Entorno reducido: Es el entorno sin su centro

en R : $E'(\vec{A};\delta)=\{ x \varepsilon R / 0 < | x - a | < \delta\}$

en R^2 : $E'(\vec{A};\delta)=\{(x;y) \varepsilon R^2 / 0 < (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < \delta^2 \}$

en R^3 : $E'(\vec{A};\delta)=\{(x;y;z) \varepsilon R^3 / 0 < (x - a_1)^2+(y - a_2)^2 +(z- a_3)^2 < \delta^2\}$

Clasificación de puntos de un conjunto

Consideremos $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{R}^n$ y $\vec{A} =(a_1; a_2 ;....;a_n) \in \mathbf{R}^n$

I.-$\vec{A}$ es ***punto de acumulación*** de **C** si y sólo si cualquier entorno reducido de $\vec{A}$ tiene intersección no vacía con **C**.

En símbolos:
I.- $\vec{A}$ es punto de acumulación de **C** $\Leftrightarrow \forall\ \delta >0 ,\exists\ \vec{X} \in \mathbf{C}/\ \vec{X} \in E'(\vec{A}; \delta) \cap \mathbf{C}$

- Al conjunto de puntos de acumulación de **C** , lo llamamos ***conjunto derivado*** de **C** y lo indicamos **C'**.
- Un conjunto es ***cerrado*** si y sólo si le pertenecen todos sus puntos de acumulación.

En símbolos: **C** es cerrado $\Leftrightarrow$ $\mathbf{C'} \subseteq \mathbf{C}$

II.- $\vec{A}$ es ***punto interior*** de **C** si y sólo si existe al menos un entorno de $\vec{A}$ totalmente incluido en **C**
En símbolos:
$\vec{A}$ es punto interior de **C** $\Leftrightarrow \exists\ \delta >0 / E(\vec{A}; \delta) \subseteq \mathbf{C}$

Al conjunto de puntos interiores de **C** lo indicamos $\mathbf{C_i}$ **.**

- Un conjunto es ***abierto*** si y sólo si todos sus puntos son interiores.

C es abierto $\Leftrightarrow \mathbf{C} = \mathbf{C}_i$

III.- $\vec{A}$ es ***punto aislado*** de **C** si y sólo si $\vec{A} \in \mathbf{C}$ pero existe un entorno reducido de $\vec{A}$ al que no pertenecen puntos de **C**.

IV.- $\vec{A}$ es ***punto exterior*** a **C** si y sólo si existe un entorno de $\vec{A}$ al que no pertenece ningún elemento de **C**.

V.- $\vec{A}$ es ***punto frontera*** de **C** si y sólo si no es interior ni exterior.

- ***Frontera de un conjunto*** es el conjunto al que pertenecen todos los puntos frontera del mismo.

Conjuntos acotados.

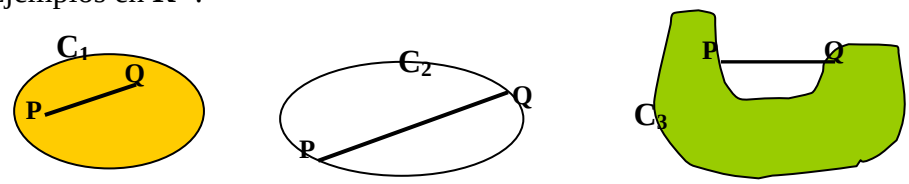
- El conjunto $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{R}^n$ está ***acotado*** si y sólo si existe un número real positivo k tal que $\forall\ \vec{\mathbf{X}} : (\vec{\mathbf{X}} \in \mathbf{C} \Rightarrow |\vec{\mathbf{X}}| < k)$.

Esto significa que si un conjunto está acotado, entonces puede incluirse en algún entorno con centro en el origen.

Conjuntos convexos

- El conjunto $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{R}^n$ es **convexo** si y sólo dados dos puntos cualesquiera de **C** , el segmento de "**recta**" que los une está incluido en **C**

  Ejemplos en $\mathbf{R}^2$:



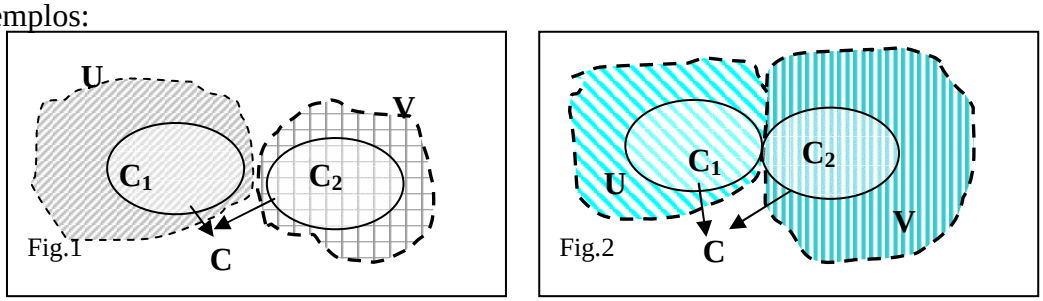
$\mathbf{C_1}$ es convexo mientras que $\mathbf{C_2}$ y $\mathbf{C_3}$ no son convexos.

En $\mathbf{R}^3$, una esfera es convexa, en cambio una superficie esférica no lo es.

Conjuntos disconexos y conexos

- Un conjunto $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{R}^n$ es **disconexo** o **no conexo** si y sólo si existen dos conjuntos abiertos, no vacíos **U** y **V** tales que $\mathbf{U} \cup \mathbf{V} = \varnothing$ y $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ **(creo que es al revés)**

Ejemplos:



En ambas figuras el conjunto **C** es la unión de $\mathbf{C_1}$ y $\mathbf{C_2}$
En la figura 1, **C** es **disconexo**; en cambio, en la figura 2, no. El conjunto **C** de la figura 2 es **conexo** ya que no es posible encontrar dos conjuntos abiertos, disjuntos , no vacíos tales que su unión contenga a **C**.

- Un conjunto $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{R}^n$ es **conexo** si y sólo si **no es disconexo.**

Conjuntos conexos por poligonal (p-conexos)

El conjunto $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{R}^n$ es ***conexo por poligonal*** si y sólo si cualquier par de puntos perteneciente a **C** pueden unirse mediante una poligonal constituida por un conjunto finito de segmentos totalmente incluidos en **C**.

Estos conjuntos son p-conexo, conexos pero no convexos.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Definición de función:

Dados dos conjuntos **A** y **B** , llamamos **función de A en B**
a todo conjunto de pares ordenados con primera componente en **A** y segunda componente en **B** que verifique las siguientes condiciones (Si un par es (a;b) decimos que "b es la imagen de a"):
a) Todo elemento de **A** debe tener imagen en **B.**(Existencia de imagen)
b) Cada elemento de **A** debe tener una única imagen en **B.**(Unicidad de la imagen)

En símbolos:

$$f:A\rightarrow B \text{ es función } \Leftrightarrow \begin{cases} f\subseteq AxB \\ \forall\, x\,\varepsilon\, A, \exists\, y\,\varepsilon\, B \,/\, (x;y)\varepsilon\, f \\ (x;y_1)\varepsilon\, f \wedge (x;y_2)\varepsilon\, f \Rightarrow y_1 = y_2 \end{cases}$$

Trabajaremos con funciones en las que **A** y **B** son subconjuntos de **R** ó $\mathbf{R^n}$**.**

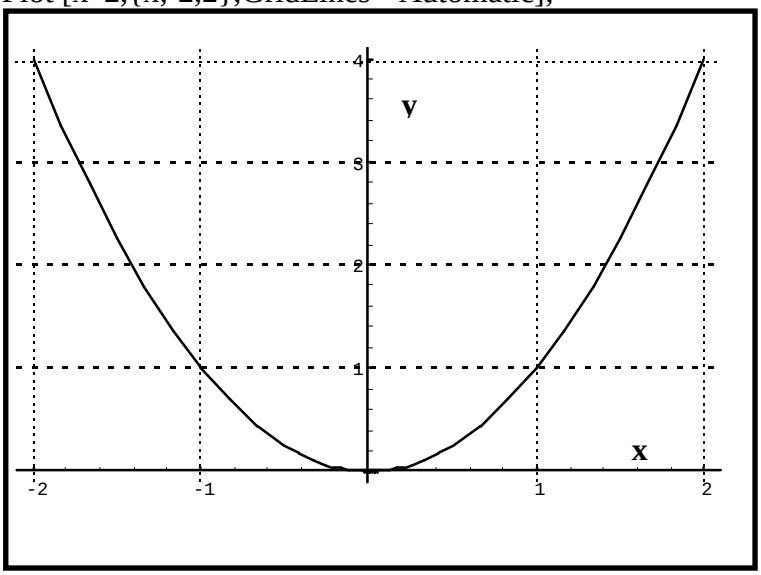
TIPOS DE FUNCIONES

1) **Funciones escalares**

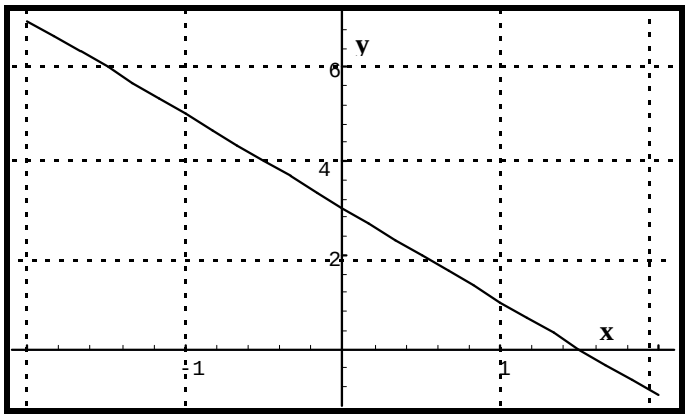
$$\boxed{f:A\rightarrow B \text{ es función escalar} \Leftrightarrow A\subseteq R \wedge B\subseteq R}$$

Por ejemplo : $f : R\rightarrow R \,/\, f(x) = x^2$

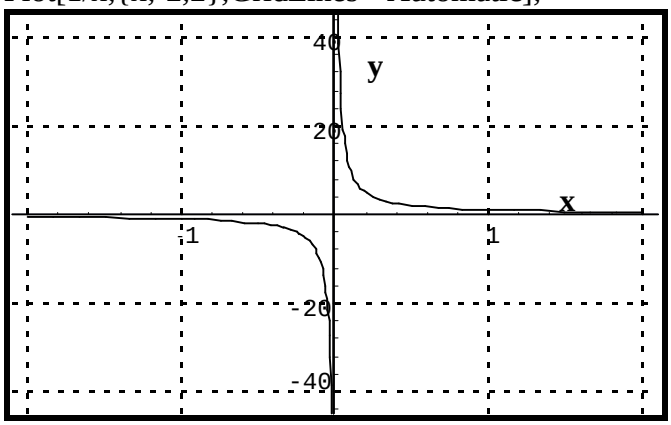
Plot [x^2,{x,-2,2},GridLines->Automatic];



g: R→ R / g(x) = - 2 x + 3
Plot[-2x+3,{x,-2,2},GridLines->Automatic];



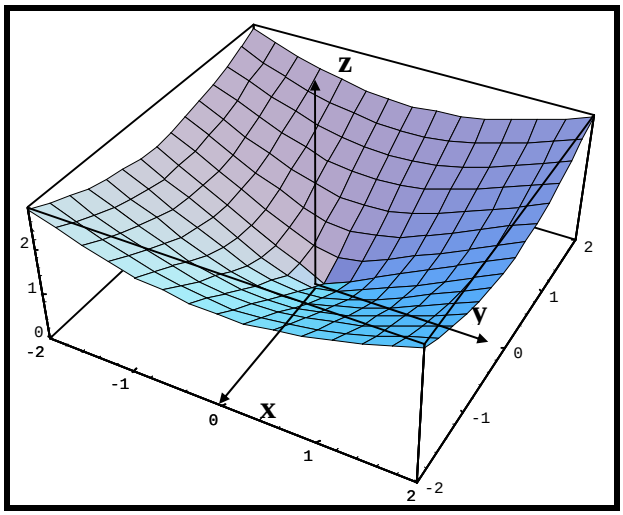
h: R-{0)→ R/ h(x) = $\frac{1}{x}$
Plot[1/x,{x,-2,2},GridLines->Automatic];



2) **<u>Campos escalares</u>**

F :A→ B es campo escalar⇔ A⊆ R^n ∧ B⊆ R con n ε N ∧ n ≥ 2

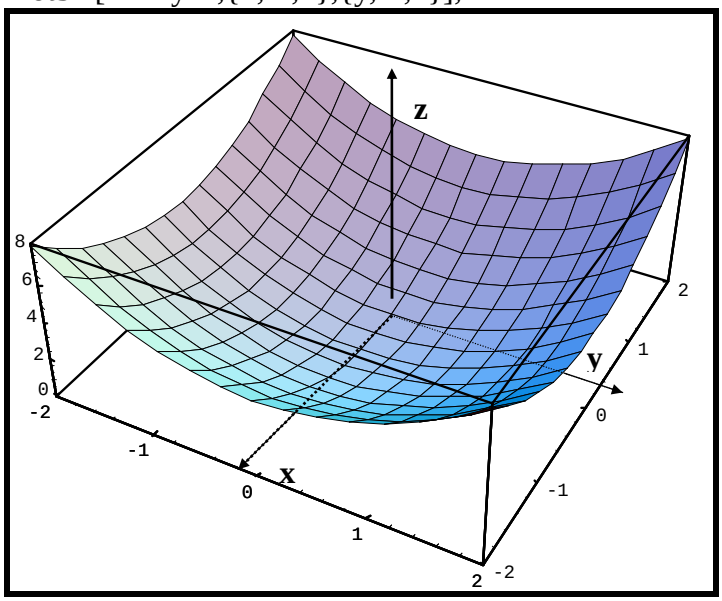
Por ejemplo :H: R^2→ R/ H(x;y) =$\sqrt{x^2 + y^2}$
Plot3D[Sqrt[x^2+y^2],{x,-2,2},{y,-2,2}];



Superficie cónica circular recta con vértice en (0;0;0) , eje z, con $z \geq 0$

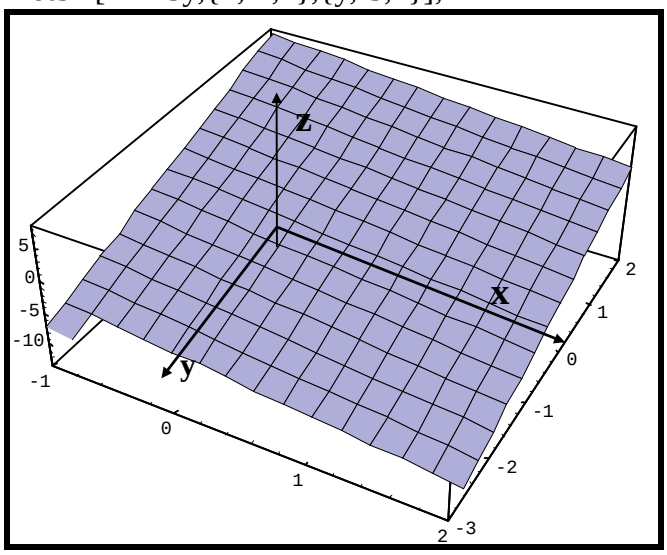
G: $R^2 \rightarrow R$ / $G(x;y) = x^2 + y^2$

Plot3D[x^2+y^2,{x,-2,2},{y,-2,2}];



F: $R^2 \rightarrow R$ / $F(x;y) = -2x + 3y$

Plot3D[-2x+3y,{x,-1,2},{y,-3,2}];



U: $R^3 \rightarrow R$ / U(x;y;z)= x + y + z (Como el dominio está incluido en $\mathbf{R^3}$ no tiene representación cartesiana)

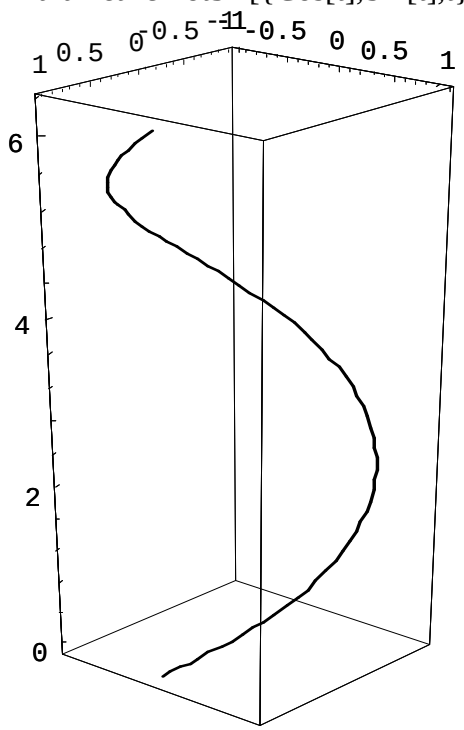
3) **Funciones vectoriales**

$\vec{f}: A \rightarrow B$ es función vectorial $\Leftrightarrow A \subseteq R \wedge B \subseteq R^m$ con $m \geq 2$

Por ejemplo:

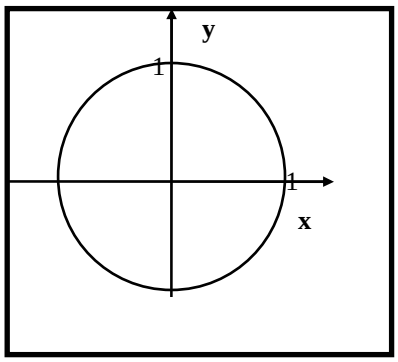
$\vec{g}: R \rightarrow R^3 / \vec{g}(t) = \cos t.\breve{i} + \operatorname{sen} t.\breve{j} + t.\breve{k}$

ParametricPlot3D[{Cos[t],Sin[t],t},{t,0,2Pi}, ViewPoint->{2.298,1.991,1.486}];



Hélice circular recta

$\vec{f}: [0,2\pi] \subset R \rightarrow R^2 / \vec{f}(t) = (\cos t; \operatorname{sen} t)$



(Los gráficos corresponden a los conjuntos imágenes)

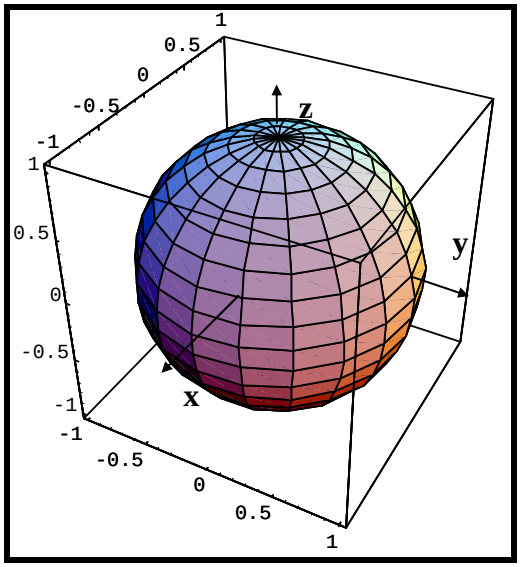
4) **<u>Campos vectoriales</u>**

$$\vec{F}: A \to B \text{ es campo vectorial} \Leftrightarrow A \subseteq R^n \wedge B \subseteq R^m, \text{ con } n \geq 2 \wedge m \geq 2$$

Los conjuntos imagen de algunos campos vectoriales definidos de subconjuntos de R^2 en R^3 están asociados a superficies en R^3

Por ejemplo: $\vec{F}: A \subset R^2 \to R^3 \,/\, \vec{F}(u;v) = (\cos u.\operatorname{sen} v; \operatorname{sen} u.\operatorname{sen} v, \cos v)$

ParametricPlot3D[{Cos[u]*Sin[v],Sin[u]*Sin[v],Cos[v]},{u,0,2Pi},{v,0,Pi}];



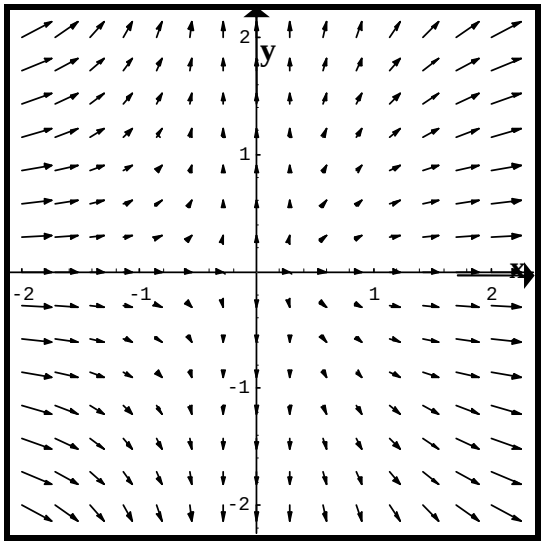
Superficie esférica de radio 1
y centro en (0;0;0)

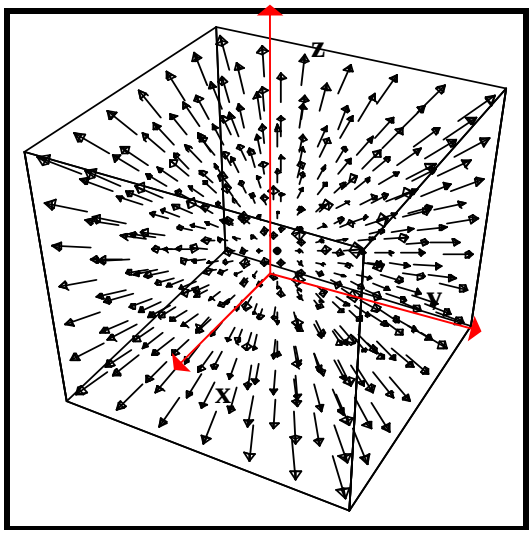
$\vec{F}: R^2 \to R^2 \,/\, \vec{F}(x;y) = (x^2; y)$

```
<<Graphics`PlotField`
PlotVectorField[{x^2,y},{x,-2,2},{y,-2,2},
Axes->True];
```

$\vec{G}: R^3 \to R^2 \,/\, \vec{G}(x;y;z) = x.\breve{i} + y.\breve{j} + z.\breve{k}$

```
<<Graphics`PlotField3D`
PlotVectorField3D[{x,y,z},{x,-2,2},
{y,-2,2},{z,-2,2},VectorHeads->True];
```





<u>OBSERVACIÓN :</u> *En todos los casos A es el conjunto de partida o dominio, B es el conjunto de llegada. El conjunto de elementos de B que son imagen de algún elemento de A es el conjunto imagen de la función .*

Dominio de un campo escalar

En Análisis I, se vio que una expresión puede no definir una función de R en R, pero sí definirla de un subconjunto de R en R. De la misma forma, puede ocurrir que una expresión en 2 variables no defina una función de R^2 en R, pero a veces, es posible determinar algún subconjunto de R^2 para el cual quede definido un campo escalar.

Veamos algunos ejemplos en R^2 :

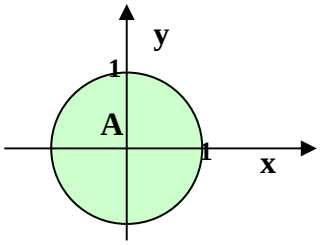
Hallar $A \subseteq R^2$ para que $F:A \to R$ sea función:

1) $F(x;y)= \sqrt{1-x^2-y^2}$

Para que el resultado de una raíz cuadrada sea un número real, el radicando debe ser no negativo.

1- $x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$

$A=\{(x;y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$



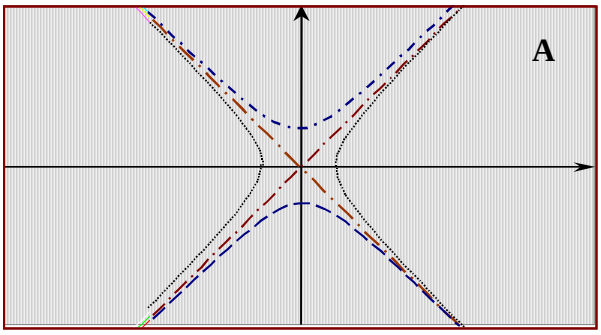
2) $G(x;y)= \dfrac{1}{\ln|x^2 - y^2|}$

Para que el logaritmo sea un número real, el argumento debe ser mayor que cero.
Para poder efectuar la división, el denominador debe ser distinto de cero.
Entonces:

$$|x^2 - y^2| \neq 0 \ \wedge |x^2 - y^2| \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} |x| \neq |y| \wedge \\ x^2 - y^2 \neq 1 \wedge \\ y^2 - x^2 \neq 1 \end{cases}$$

Resulta:

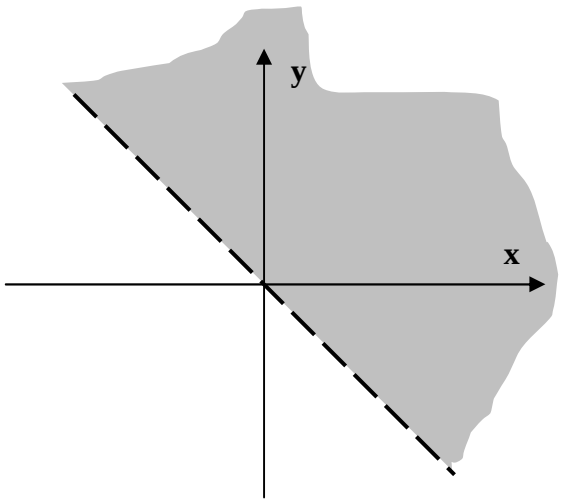
$A= \{ (x;y) \in R^2 / |x| \neq |y| \wedge x^2 - y^2 \neq 1 \wedge y^2 - x^2 \neq 1\}$



3) H(x;y)=ln(x+y)

Como el argumento del logaritmo debe ser positivo, se tiene: $x + y > 0 \Rightarrow x>-y$

Luego: $A=\{(x;y)\in R^2/\ y\ >-x\}$



<u>Conjuntos de nivel .Curvas y superficies de nivel:</u>

Definición:

Consideremos un campo escalar de dos variables

z = F(x;y); llamamos ***<u>curva de nivel de F correspondiente al valor k</u>*** al conjunto :

$$C = \{(x;y)\varepsilon\ R^2/\ F(x;y) = k\}\ \text{ con } k\ \varepsilon\ Im(F)$$

Si w=G(x;y;z) es un campo escalar de tres variables, llamamos ***<u>superficie de nivel de G correspondiente al valor k,</u>*** al conjunto:

$$S = \{\ (x;y;z)\varepsilon\ R^3/\ G(x;y;z) = k\} \text{ con } k\ \varepsilon\ Im(G)$$

En gral. , si $H : A\subseteq R^n \rightarrow R$ con $n \geq 2$, llamamos ***<u>conjunto de nivel de H corespondiente a k</u>*** a

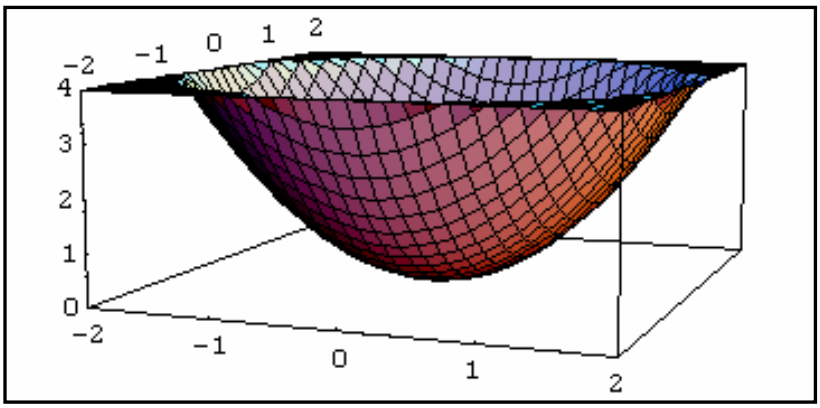
$L_k =\{(x_1;x_2;.....x_n)/\ H(x_1;x_2;.....x_n) = k\ \}$ con $k \in Im\ (H)$

Ejemplos:

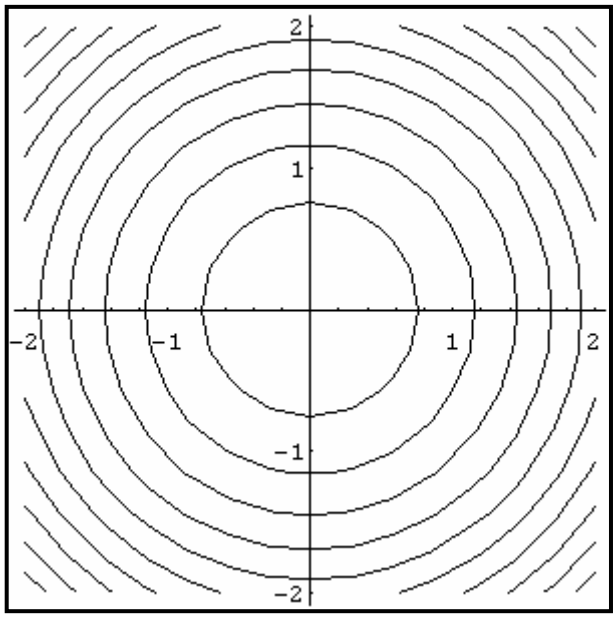
1) $F(x;y)= x^2 + y^2$, $Im(F)= R^+_o$

Si hacemos $x^2 + y^2= k$ con $k \in R^+_o$, se obtiene el origen de coordenadas (k=0) o circunferencias concentro en (0;0) y radio $\sqrt{k}$

Con el programa Mathematica graficamos la función y algunas de sus curvas de nivel:

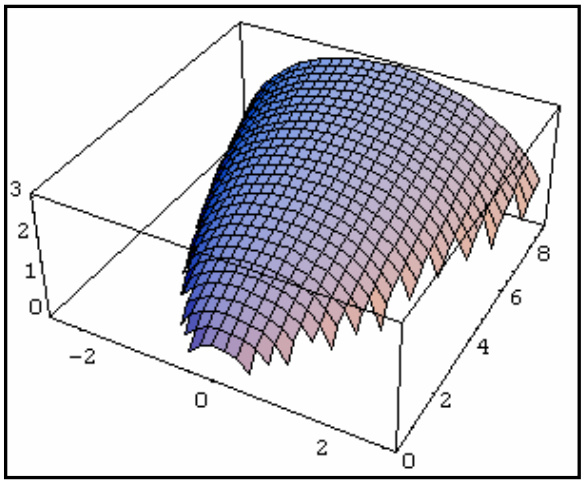


Se trata de un paraboloide redondo

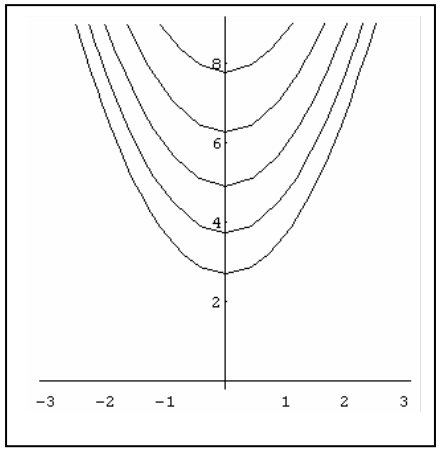


Curvas de nivel del paraboloide

2)G(x;y)= $\sqrt{y-x^2}$, G:A $\subset R^2 \to R$, A= {(x;y)$\in R^2$/ y$\geq$ x^2}, Im(G)= R^+_0



Se trata de un semiparaboloide circular de eje y.



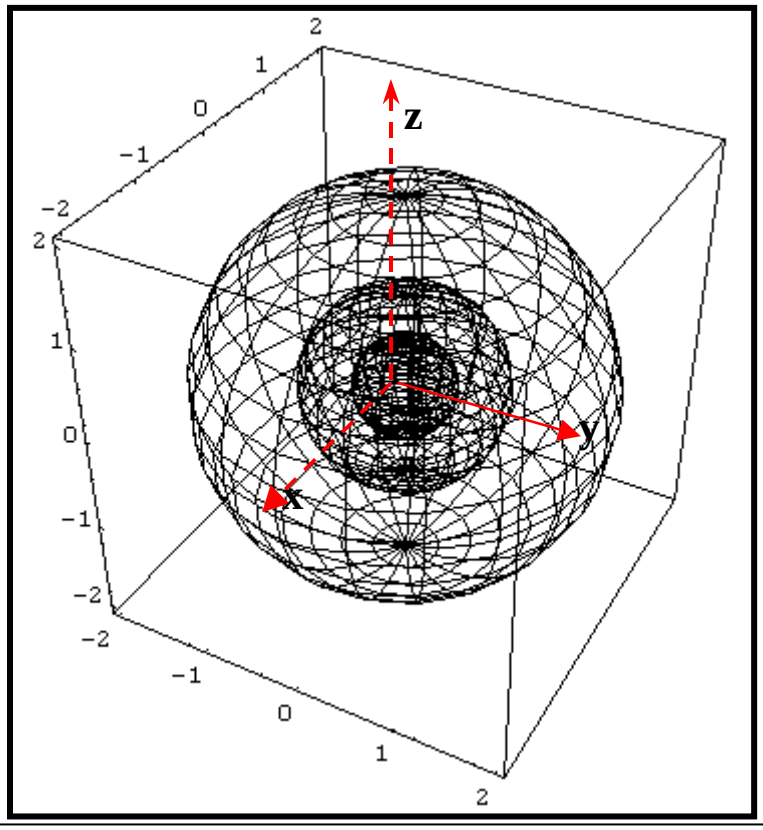
Las curvas de nivel son parábolas de la forma y= x^2 + k^2

3) Si el campo escalar está definido de un subconjunto de R^3 en R, es imposible mostrar su gráfico cartesiano. En cambio si podemos presentar sus superficies de nivel.

$H:A \rightarrow R$ / $H(x;y;z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$, con $A= \{(x;y;z) \in R^3 / \ x^2+y^2+z^2 \neq 0\}$

Se tiene Im(H)= R.

Si hacemos $\ln(x^2+y^2+z^2)=k$, resulta $x^2+y^2+z^2 = e^k$ (son superficies esféricas con centro en (0;0;0) y radio $e^{k/2}$



La figura muestra las superficies de nivel correspondientes a k<0, k=0 y k>0.

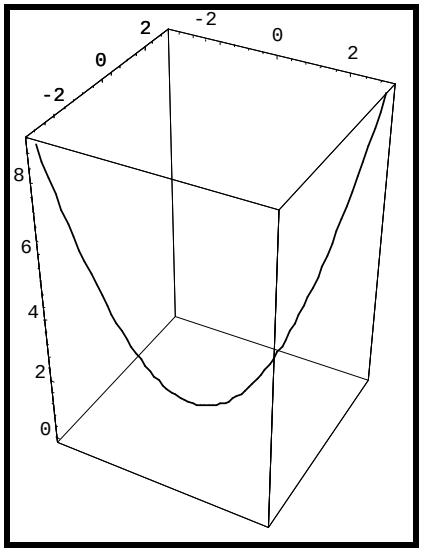
<u>Curvas. Superficies. Superficies simples. Curvas sobre una superficie.</u>

Definiciones:

a) Dada una función vectorial $\vec{f}:A \subseteq R \rightarrow R^n$ (con $n \geq 2$) tal que todas sus componentes, que son funciones escalares, sean continuas, llamamos ***<u>curva asociada a</u>*** $\vec{f}$ conjunto imagen de A dado por $\vec{f}$.

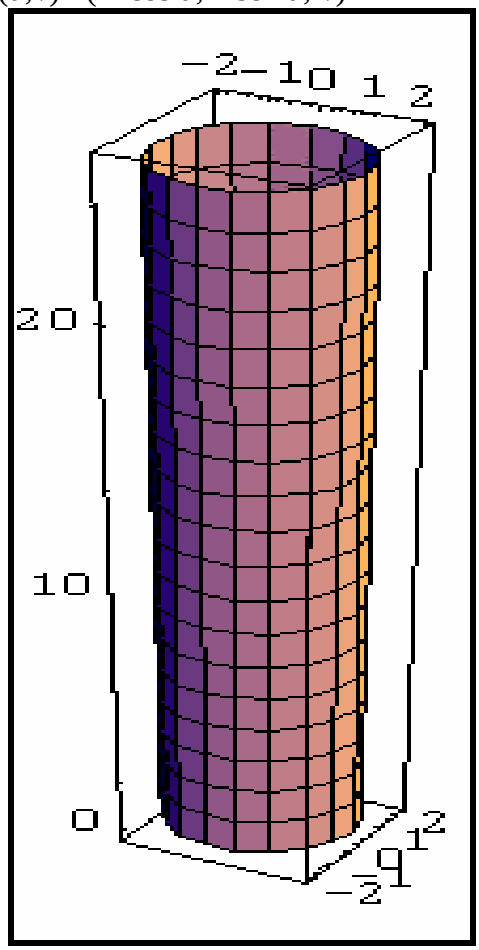
Ejemplo: $\vec{f}: R \rightarrow R^3$ / $\vec{f}(t)=(t,t,t^2)$

ParametricPlot3D[{t,t,t^2},{t,-3,3},Axes->True];



b) Dado un campo vectorial $\vec{G}$:A $\subseteq$ $R^2 \rightarrow R^3$, tal que todas sus componentes, que son campos escalares sean continuos, llamamos ***superficie asociada a*** $\vec{G}$: conjunto imagen de A dado por $\vec{G}$:

Ejemplo: $\vec{G}$: $R^2 \rightarrow R^3$ / $\vec{G}$:(u;v) =(2 cos u; 2 sen u; v)



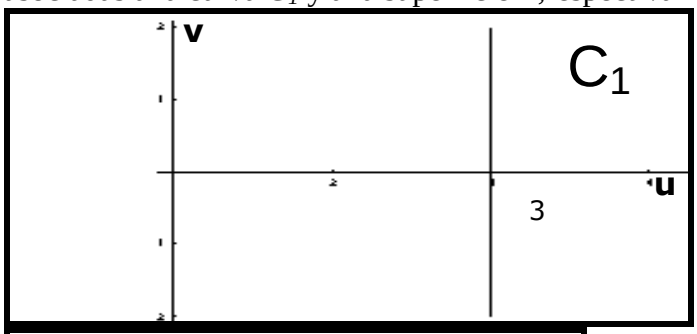
El conj. imagen es una sup. cilíndrica

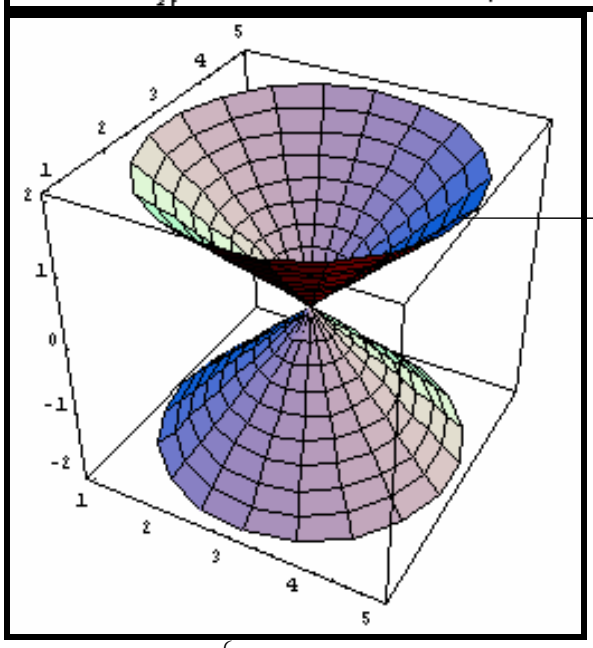
Si $\vec{G}$: es inyectiva en un conjunto conexo, decimos que la superficie representada por el conj. imagen de $\vec{G}$: es ***simple***.

c) Si se compone una función vectorial continua $\vec{f}$:[a,b] $\subseteq$ R$\rightarrow$D$\subseteq R^2$, con un campo vectorial continuo $\vec{G}$:A $\subseteq$ $R^2 \rightarrow R^3$, cuyo conjunto imagen representa una superficie Σ, siendo D$\subseteq$ A, el conjunto imagen de $\vec{G} \circ \vec{f}$ representa una ***curva sobre la superficie Σ***

Por ejemplo:

Sean $\vec{f}:R\to R^2/\ \vec{f}(t) = (3;t)$ y $\vec{G}: R^2\to R^3/\ \vec{G}(u;v)=(3+u\cos v;\ 3+u\,\text{sen}v;u)$ asociadas a la curva C_1 y a la superficie Σ,respectivamente.





Σ(sup.cónica)

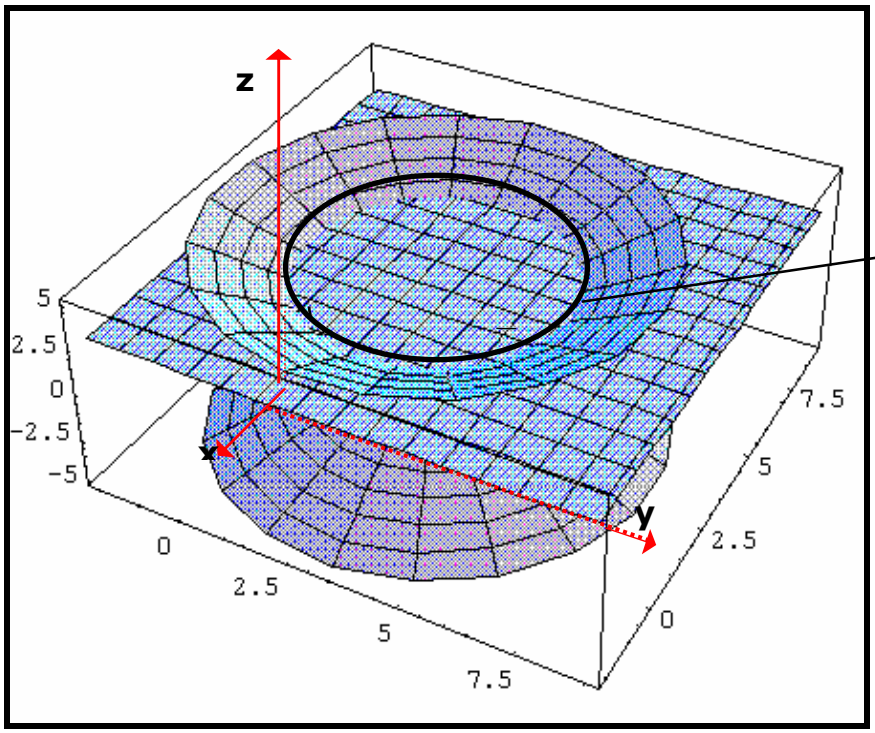
Para efectuar la composición , pensamos : $\begin{cases} u = 3 \\ v = t \end{cases}$ con $t \in \mathbf{R}$

Entonces , resulta:

$\vec{G}_o\ \vec{f}(t)=(3 + 3\cos t;3+3\,\text{sen}\,t;3)$

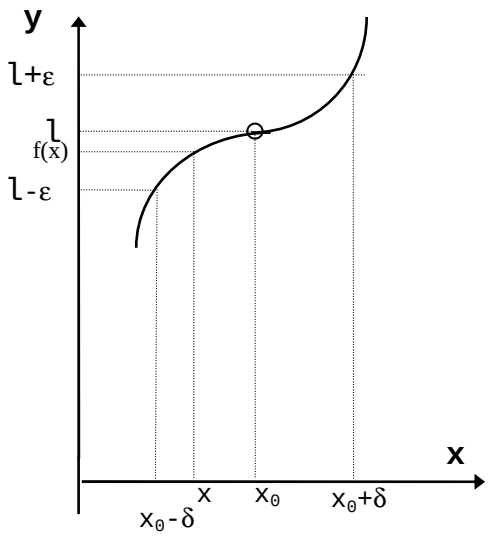
Es decir: $\begin{cases} x = 3+3\cos t \\ y = 3+3\,\text{sen}\,t \\ z = 3 \end{cases}$

Por lo tanto: $C_2\begin{cases} (x-3)^2+(y-3)^2 = 9 \\ z = 3 \end{cases}$



C_2 es la circunferencia de radio 3 y centro en (3;3;3) sobre el plano z= 3

LÍMITE



1.- *Para funciones escalares*

. Consideremos una función f: A →R / y = f(x) con A ⊆R y también el punto x_o , punto de acumulación de A

Decimos que $\lim_{lx \to x_o} f(x) = l$ si y sólo si para cualquier número positivo ε, es posible determinar otro número positivo δ que dependa de ε, tal que todos los valores de "x" pertenecientes al dominio de f y a un entorno reducido de x_o de amplitud δ tengan su imagen a una

En símbolos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) / \forall x:[x \in A \wedge x \in E'(x_0, \delta) \Rightarrow | f(x) - l | < \varepsilon$$

Recordemos además que existen sólo dos "formas" de acercarse a x_o, por derecha o por izquierda. Estos dos "caminos" permiten definir el concepto de "límite lateral". Si los límites laterales existen y son distintos, no existe límite. Si en cambio, son iguales , el límite existe y es igual a ambos.

2.- *En general*

La definición es la misma.

Consideremos, una función $\vec{F}$: **A** → **R**$^{\mathbf{n}}$con **A**⊆ **R**$^{\mathbf{m}}$ y $\vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{o}}$, punto de acumulación de A.

Decimos que $\lim_{\vec{X} \to \vec{X}_0} \vec{F}(\vec{X}) = \vec{L}$ si y sólo si para cualquier número positivo ε, es posible determinar otro número positivo δ, que dependa de ε, tal que para todos los valores de $\vec{X}$ pertenecientes al dominio de $\vec{F}$ y a un entorno reducido de $\vec{X}_o$ de amplitud δ, la norma del vector diferencia entre $\vec{F}(\vec{X})$ y $\vec{L}$ sea menor que ε,

En símbolos:

$$\lim_{\vec{X} \to \vec{X}_0} \vec{F}(\vec{X}) = \vec{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \forall \vec{X} : [\vec{X} \in A \wedge \vec{X} \in E'(\vec{X}_0; \delta) \Rightarrow \left\| \vec{F}(\vec{X}) - \vec{L} \right\| < \varepsilon]$$

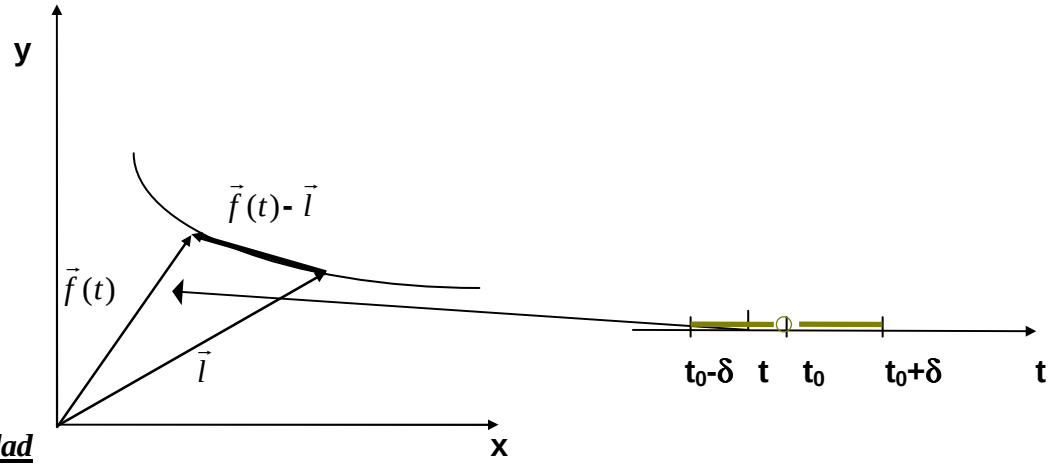
2.1.- *Para funciones vectoriales*

Consideramos $\vec{f}$: **A**→**R**$^{\mathbf{n}}$ con n ≥2 , **A**⊆**R** / $\vec{f}$(t)=(f_1(t);f_2(t);.....f_n(t)).,t_0 punto de acumulación de A. La misma definición toma esta forma

$$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{l} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \forall t:[t \in A \wedge t \in E'(t_0; \delta) \Rightarrow \| \vec{f}(t) - \vec{l} \| < \varepsilon]$$

donde $\vec{l}$ =(l_1; l_2 ;.....;l_n) ∈ **R**$^{\mathbf{n}}$

Para interpretarlo gráficamente se trabaja con el conjunto imagen. Si n=2, podemos interpretar la definición de límite con el siguiente gráfico:



Propiedad

Considero $\vec{f}: A \to R^n$ con $A \subset R \wedge n \geq 2$ y un punto t_0 de acumulación de ***A.***

Si $\vec{f}(t) = (f_1(t); f_2(t); \ldots; f_n(t))$, y $\vec{l} = (l_1; l_2; \ldots; l_n)$se quiere probar que:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{l} \iff \lim_{t \to t_0} f_i(t) = l_i \ , \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Por def. de límite:

$$\lim_{t \to t_o} \vec{f}(t) = \vec{l} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 / \forall t: [t \in A \wedge t \in E'(t_o; \delta) \Rightarrow \left\| \vec{f}(t) - \vec{l} \right\| < \varepsilon \ ]$$

o lo que es equivalente: $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(f_i(t) - l_i \right)^2} < \varepsilon$

Pero para cada i , se cumple que :$\left| f_i(t) - l_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(f_i(t) - l_i \right)^2$, entonces:

$$\left| f_i(t) - l_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(f_i(t) - l_i \right)^2} < \varepsilon$$

Resulta que, dado un ε>0, existe δ(ε) >0 tal que: para todo t perteneciente al dominio de la función vectorial, y por lo tanto al dominio de cada una de sus componentes, y a un entorno reducido de t_o de amplitud δ, se cumple que $\left| f_i(t) - l_i \right| < \varepsilon$, con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, o sea $\lim_{t \to t_o} f_i(t) = l_i$

2. $\boxed{\Leftarrow}$

$$\lim_{t \to t_o} f_i(t) = l_i \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_i(\varepsilon) > 0 / \forall t: [t \in A \wedge t \in E'(t_o; \delta_i) \Rightarrow \left| f_i(t) - l_i \right| < \varepsilon \ ],$$

con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Entonces para t $\in A \wedge t \in E'(t_o; \delta)$, con $\delta = \min\{\delta_i\}$, se cumple que :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(f_i(t) - l_i \right)^2 < n \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(f_i(t) - l_i \right)^2} < \sqrt{n}\varepsilon \longrightarrow \varepsilon'$$

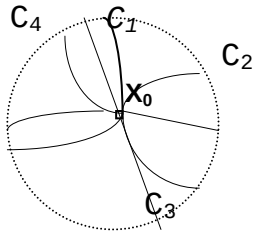
Es decir, dado ε‘>0, existe δ(ε‘)= mín { δ_i } tal que para todo t perteneciente al dominio de la función vectorial y a un entorno reducido de t_o de amplitud δ, se cumple que

$\left\| \vec{f}(t) - \vec{l} \right\| < \varepsilon$ ' . Por lo tanto: $\lim\limits_{t \to t_o} \vec{f}(t) = \vec{l}$

2.2.- Para campos escalares

Trabajaremos con campos escalares de dos variables, es decir con funciones del tipo F:**A→R** con $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}^2$ / z = F(x;y) . Si $(x_o;y_o)$ es un punto de acumulación de A, el concepto de **límite doble** se define igual que en los casos anteriores. La diferencia y también la dificultad, radica en el concepto de entorno en $\mathbf{R}^2$**.**

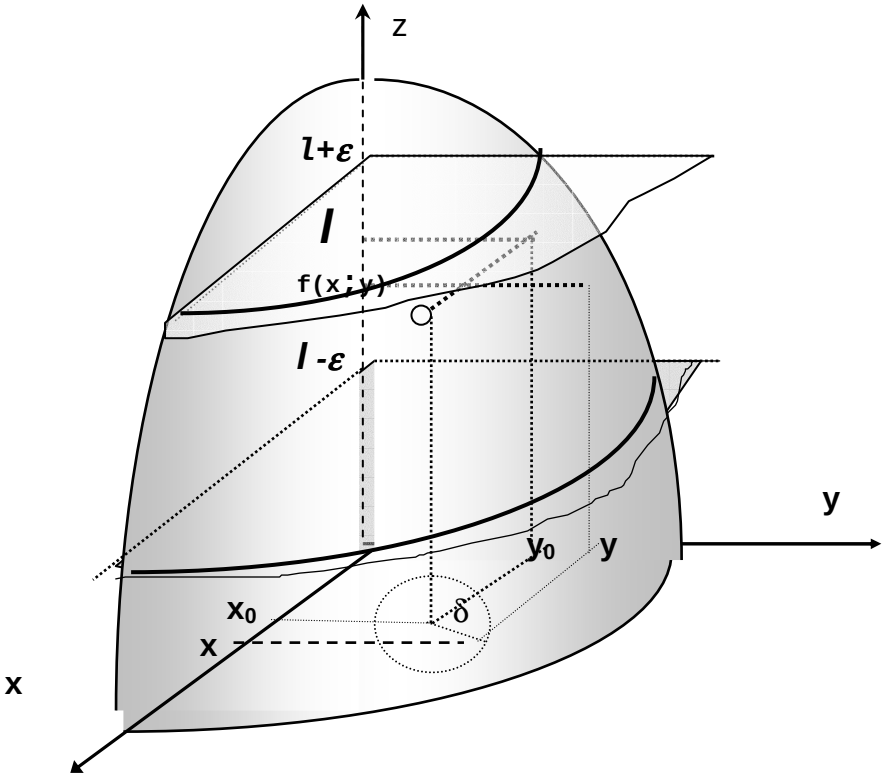
Teniendo en cuenta que un entorno en el plano es un círculo abierto (es decir, sin la circunferencia borde), resulta que existen infinitos caminos para acercarnos a $(x_o;y_o)$. Para que el límite doble exista, el comportamiento de la función a lo largo de ***todos*** los caminos incluidos en su dominio y en un entorno reducido de $(x_o;y_o)$ debe ser el mismo.



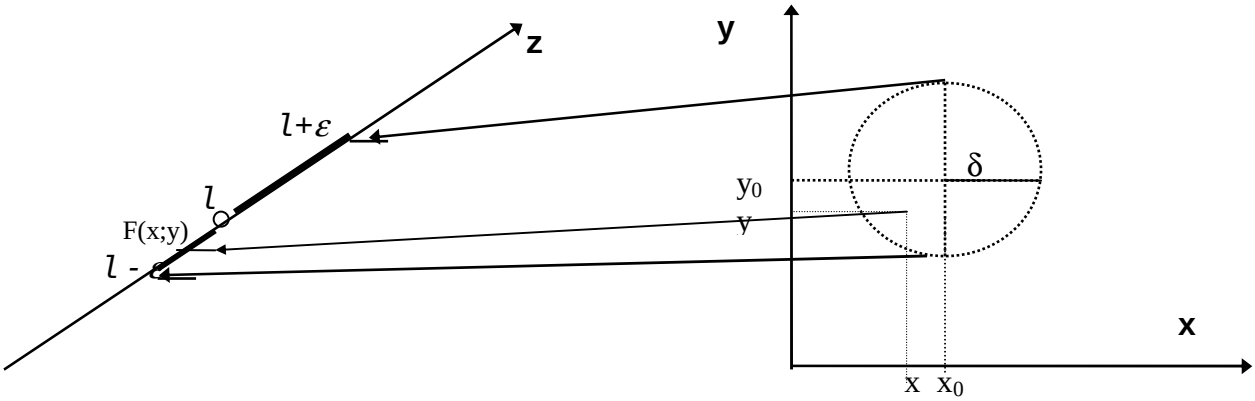
Límite Doble:

Si F:**A→R** con $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}^2$ / z = F(x;y) y $(x_o;y_o)$ es un punto de acumulación de A, el concepto de límite extendido a más de una variable es:

$$\lim_{(x;y)\to(x_o;y_o)} F(x;y) = l \Leftrightarrow \forall (x;y):[(x;y)\in A \wedge 0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |F(x;y)-l| < \varepsilon]$$



Los puntos sobre la superficie, correspondientes a los puntos del dominio pertenecientes a un entorno reducido de $(x_o;y_o)$ de radio δ, se encuentran entre dos planos paralelos al plano xy de ecuaciones $z = l + \varepsilon$ y , $z = l - \varepsilon$



Decidir la no existencia del límite doble es relativamente sencillo si se encuentran dos caminos a lo largo de los cuales la función presenta distintos comportamientos.

Para los límites de campos escalares valen las mismas propiedades que para los límites de funciones escalares

1.- Si el límite de $F(\vec{X})$ para $\vec{X} \to \vec{X}_o$ es finito, existe un entorno reducido de $\vec{X}_o$ en el que la función está acotada.

2.- Si el límite de $F(\vec{X})$ para $\vec{X} \to \vec{X}_o$ es finito y distinto de cero, existe un entorno reducido de $\vec{X}_o$ en el que la función tiene el mismo signo que el límite.

3.- El límite de una suma, resta o producto de campos escalares que tienen límite finito para $\vec{X} \to \vec{X}_o$, es respectivamente igual a la suma , resta o producto de sus límites. El cociente también siempre que el límite del campo escalar que figure en el denominador sea distinto de cero.

4.- Si el límite de $F(\vec{X})$ para $\vec{X} \to \vec{X}_o$ es finito, entonces $F(\vec{X})$ puede escribirse como la suma de su límite más un campo escalar que es infinitésimo cuando $\vec{X} \to \vec{X}_o$.

Ejemplos:

1)

$$\lim_{(x;y)\to(1;2)} \frac{x.y-2x-y+2}{(x^2-1).(y-2)} = \lim_{(x;y)\to(1;2)} \frac{x.(y-2)-(y-2)}{(x-1).(x+1)(y-2)} = \lim_{(x;y)\to(1;2)} \frac{(x-y).\cancel{(y-2)}}{(x-1).(x+1)\cancel{(y-2)}} = \frac{1}{2}$$

2) $$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x.y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} x.\frac{y^2}{x^2+y^2} = 0$$ (por ser producto de infinitésimo por f. acotada)[1]

$\boxed{\text{función acotada}}$

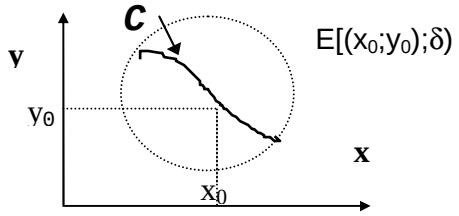
<u>Límites a lo largo de un camino</u>

---

[1] $0 \le y^2 \le x^2 + y^2$. Como $x^2 + y^2 \neq 0$, resulta $0 \le y^2/(x^2 + y^2) \le 1$

Consideremos un campo escalar de dos variables F:$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{R}$ con $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}^2$ /
z = F(x;y) y sea C un camino incluido en A del cual (x_o; y_o) sea punto de acumulación.

Estudiar el límite de F a lo largo de C, significa considerar, en la definición de límite de un campo escalar, que los puntos (x;y) además de pertenecer al entorno reducido de (x_o; y_o)deberán pertenecer a C, siendo (x_o; y_o) un punto de acumulación de C.



El cálculo de límites a lo largo de un camino se reduce a un cálculo de límite en una variable.

Supongamos que $C = \{(x;y) \in A \ / \ y = f(x)\}$ y que $\vec{\mathbf{X}}_\mathbf{o} = (x_o;y_o)$ es punto de acumulación de C, entonces el límite de F para $\vec{\mathbf{X}} \rightarrow X_0$ través de C se define:

$$\lim_{\substack{(x;y)\rightarrow(x_O;y_O)\\(x;y)\in C}} F(x;y) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0 / \forall(x;y) : [(x;y) \in C \wedge 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

$$\Rightarrow |F(x,y) - l| < \varepsilon$$

Para que el límite doble exista, los límites a lo largo de **<u>cualquier</u>** camino deben coincidir .
(siempre con (x;y) $\rightarrow$(x_o;y_o))

<u>Ejemplo:</u>

Sea calcular $\lim\limits_{(x;y)\rightarrow(0;0)} \dfrac{x.y}{x^2+y^2}$. Como el dominio de la función es R^2-{(0;0)}, se puede analizar el comportamiento de la función a través de "caminos" que "pasen" por (0;0).
Uno de los caminos posibles, son rectas de la familia y = mx.

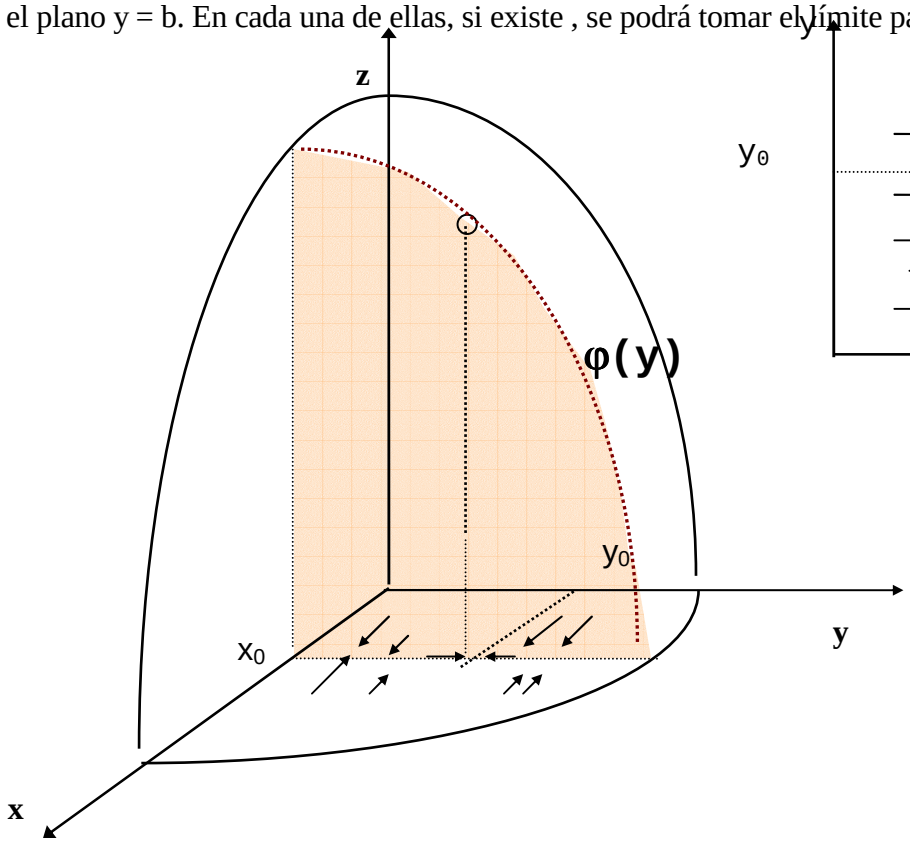
Se tiene: $$\lim_{(x;y)\rightarrow(0;0)} \frac{x.y}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x;y)\rightarrow(0;0)\\y=mx}} \frac{x.mx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\rightarrow 0} \frac{m\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}.(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

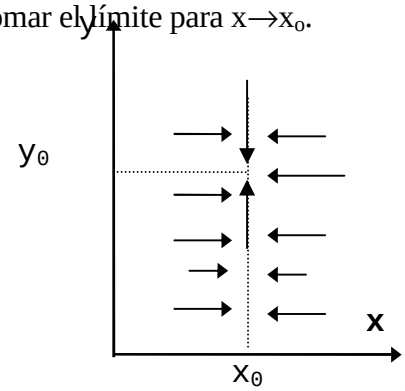
Este resultado significa que al cambiar la pendiente de la recta, el comportamiento de la función varía. Si nos acercamos al (0;0) a través de la recta y = 2x, la función se aproxima a 2/5; en cambio, si lo hacemos a través de y = -3x, la función tiende a –3/10. Por lo tanto, como existen caminos a través de los cuales el comportamiento de la función difiere, podemos asegurar que no existe el límite doble.

<u>Límites sucesivos o iterados</u>:

Consideremos z = F(x;y) con dominio $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}^2$ y (x_o;y_o) punto de acumulación de A.

Supongamos que existen las intersecciones de la superficie representativa de z = F(x;y) con planos y = b (b es una constante). Esas intersecciones serán curvas definidas por: z=F(x;b) sobre el plano y = b. En cada una de ellas, si existe , se podrá tomar el límite para $x \to x_o$.



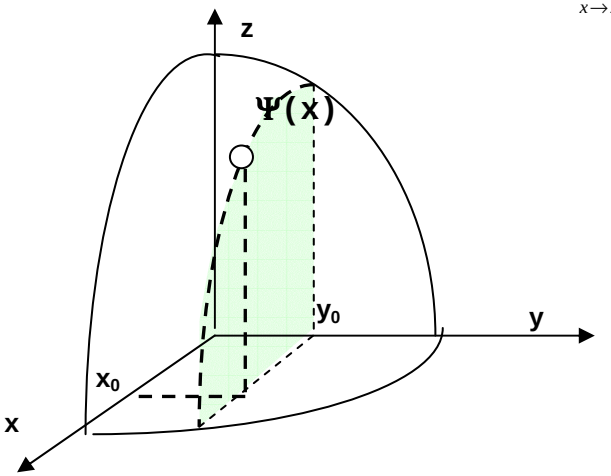


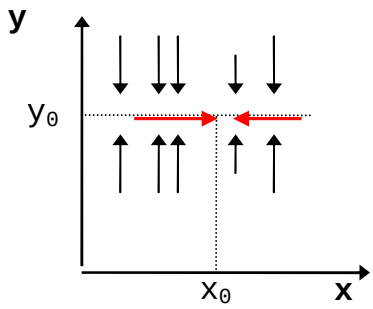
El conjunto de los límites obtenidos para los distintos valores de b, definirá , en general , una función .$\varphi(y) = \lim_{x \to x_0} F(x;y)$

En esta función, en general, se puede calcular el límite para $y \to y_o$. Se define así uno de los llamados límites sucesivos.

$$l_{xy} = \lim_{y \to y_0} \left[\lim_{x \to x_0} F(x;y) \right]$$

Con igual criterio puede definirse : $l_{yx} = \lim_{x \to x_0} \left[\lim_{y \to y_0} F(x;y) \right]$





Relaciones entre los límites sucesivos y el doble

- Si existen los límites sucesivos y el doble, los tres son iguales.
- Si los límites sucesivos existen y son distintos, no existe el límite doble.
- La no existencia de uno o de ambos límites sucesivos no permite asegurar nada acerca de la existencia del límite doble.

❑ ***OBSERVACIÓN***

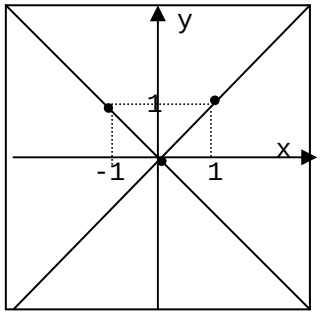
Los límites sucesivos cumplen la misma función que los límites a través de caminos: si ambos existen y son distintos permiten asegurar la **NO existencia** del límite doble. **Nunca** , por sí solos, permiten asegurar la existencia de dicho límite

Un último ejemplo:

Calcular el límite para (x;y) tendiendo a: (0;0), (1;1) y (-1;1) de

$$F(x;y)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)} & \text{si } |x|\neq|y| \\ \dfrac{1}{2}(x+y) & \text{si } x=y \vee (x;y)=(-1,1) \\ 1 & \text{si } x=-y \wedge (x;y)\notin\{(0;0),(-1;1)\} \end{cases}$$

El dominio de F es R^2, pero la forma en que está definida, indica que para estudiar el límite para $(x;y)\to(0;0)$, debe analizarse el comportamiento de F cuando $|x|\neq|y|$, cuando x = y , y cuando
x = -y



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ |x|\neq|y|}} F(x;y)=\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-y^2)}{(x^2-y^2}=1 \\ \lim\limits_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ x=y}} F(x;y)=\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{1}{2}(x+y)=0 \\ \lim\limits_{\substack{(x;y)\to(0;0)\\ x=-y}} F(x;y)=\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} 1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists\ \lambda$$

Para $(x;y)\to(1;1)$, deberemos considerar $|x|\neq|y|$ y , x = y,

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(1;1)\\ |x|\neq|y|}} F(x;y)=\lim_{(x;y)\to(1;1)} \frac{\operatorname{sen}(x^2-y^2)}{(x^2-y^2}=1$$

$$\lim_{\substack{(x;y)\to(1;1)\\ x=y}} F(x;y) = \lim_{(x;y)\to(1;1)} \frac{1}{2}(x+y) = 1$$

Como el caso $|x| \neq |y|$ incluye todos los caminos que pasa por (1;1) excepto x=y, y por este camino el comportamiento de la función es el mismo, podemos asegurar que $\lim_{(x;y)\to(1;1)} F(x;y) = 1$

De la misma forma , para (x;y) $\to$(-1;1), habrá que analizar el límite cuando $|x| \neq |y|$ y cuando x =-y y también obtendremos que el límite doble existe y vale 1.

CONTINUIDAD

Consideremos, una función F: A $\to$ R^m con A$\subseteq$ R^n y $\vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{o}}$, punto de acumulación de A.

Decimos que F(**X**) es continua en $\vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{o}}$ si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

- $\exists\ F(\vec{X}_0)$
- $\exists \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} F(\vec{X}) = l$
- $l = F(\vec{X}_0)$

Si no se cumple alguna de las condiciones, la función es discontinua en el punto. Si existe el límite doble, la discontinuidad es ***evitable***; en caso contrario, es ***esencial.***

En el último ejemplo de límite, resulta que F presenta una ***discontinuidad esencial*** *en (0;0), ya que en ese punto no existe el límite doble, una* ***discontinuidad evitable*** *en (-1;1) pues aunque el límite doble existe, el valor de la función en (-1;1) es 0 y es* ***continua*** *en (1;1).*

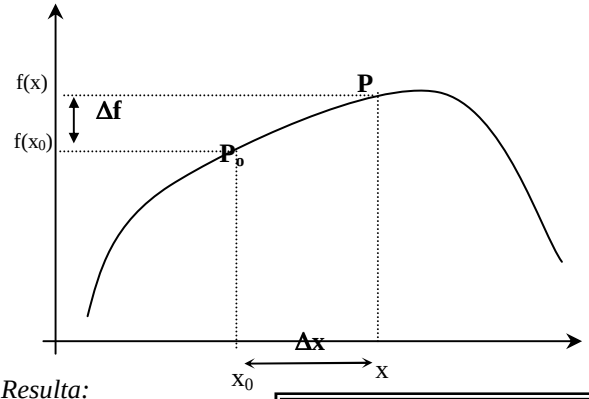
DERIVADAS

- ***Introducción***

Recordamos de Análisis I.

Definición

Sea f: A → R, *con A⊆R, y sea x_0 interior a A*



Se llama derivada de f en x_o al límite, si existe, del cociente $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, *cuando* $x \to x_0$.

Notación: $f'(x_o)=Df(x_o)=\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x_0}$

Resulta:

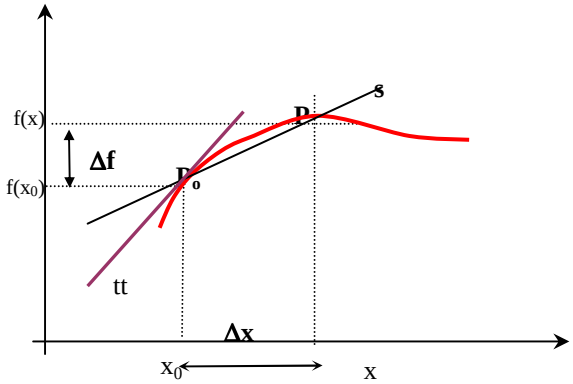
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Como una derivada es un límite pueden darse una de estas tres situaciones: que sea un número, que sea infinito o que no exista.

Definición:

f es derivable en x_o si y sólo si existe y es finito el límite para $x \to x_0$ *de* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto



El cociente $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *(cociente incremental), representa la pendiente de la recta secante a la curva* $\mathcal{C}$, *representativa de la función.*
Cuando $x \to x_0$, *el punto P "resbala" sobre la curva hasta coincidir con P_0, la recta secante alcanza una posición límite que corresponde a la recta tangente.*

Entonces, si la recta secante tiende a la recta tangente, y el cociente incremental tiende a la derivada, resulta que:

La derivada de una función en x_0 representa , si existe y es finita, la pendiente de la recta tangente a $\mathcal{C}$ *en P_o.*

- ***Derivada de función vectorial***

Consideremos $\vec{f}$:**A**$\rightarrow$ **R**$^{\mathbf{n}}$ con **A** $\subseteq$ **R** $\wedge$ n $\geq$ 2 , y t_0 pto. interior de **A**

I.1.-Definición:

Se llama vector derivado de $\vec{f}$ en t_0 al límite, si existe de: $\dfrac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t}$, cuando $\Delta t \rightarrow 0$.

Se indica $\vec{f}\,'(t_0)$.

Resulta: $\vec{f}\,'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \rightarrow 0} \dfrac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t}$

Teorema:

$\vec{f}\,(t) = (f_1(t);f_2(t);.....;f_n(t))$ es derivable en $t_0 \Leftrightarrow f_i\,(t)$ es derivable en t_0, $\forall i \in \{1,...,n\}$

Demostración:

$\vec{f}\,(t)$ derivable en $t_0 \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{\Delta t \rightarrow 0} \dfrac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t} \Leftrightarrow$ Por def. de derivada

Por def. de $\vec{f}$

$$\exists \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(f_1(t_o+\Delta t);f_2(t_o+\Delta t);\cdots f_n(t_o+\Delta t))-(f_1(t_o);f_2(t_o);\cdots f_n(t_o))}{\Delta t} \Leftrightarrow$$

$$\exists \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(f_1(t_o+\Delta t)-f_1(t_o);....;f_n(t_o+\Delta t)-f_n(t_o)\right)}{\Delta t} \Leftrightarrow$$

$$\exists \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_1(t_0+\Delta t)-f_1(t_0)}{\Delta t};\cdots;\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{fn(t_0+\Delta t)-fn(t_0)}{\Delta t}\right) \Leftrightarrow$$

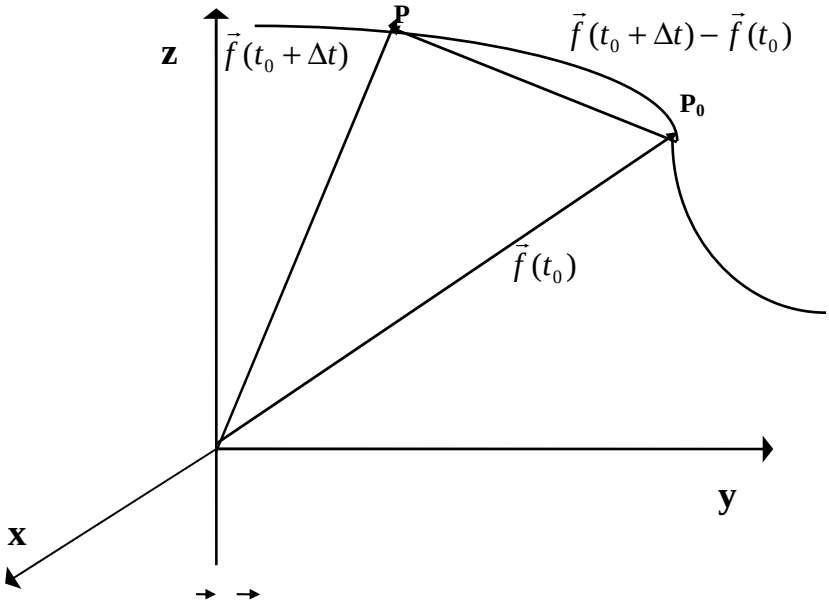
Por límite de una función vectorial

Por def. de vector y de deriv. de una función escalar

$$\exists \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_1(t_0+\Delta t)-f_1(t_0)}{\Delta t} = f_1'(t_0) \wedge .....\wedge \exists \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_n(t_0+\Delta t)-f_n(t_0)}{\Delta t} = f_n'(t_0)$$

Recta tangente y plano normal a una curva en R^3

Consideramos $\vec{f}$:**A**$\rightarrow$ **R**$^{\mathbf{n}}$ continua ,con **A** $\subseteq$ **R** $\wedge$ n = 3. La representación gráfica del conjunto imagen es una curva en **R**$^{\mathbf{3}}$



Consideremos los puntos $\vec{\mathbf{P}}$ y $\vec{\mathbf{P_0}}$ definidos por $\vec{f}(t_0+\Delta t)$ y por $\vec{f}(t_0)$;el vector $\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)$ tiene el módulo y la dirección de la cuerda $\overline{\mathbf{PP_0}}$.

Al dividir por Δt y tomar el límite para $\Delta t \to 0$, el vector derivado, si existe, tendrá la dirección límite de la de una cuerda cuyo extremo tiende a coincidir con el punto inicial , es decir tendrá la dirección ***tangente*** a la curva en $\vec{\mathbf{P_0}}$.

Resulta que la recta tangente a la curva representativa de la imagen de $\vec{f}(t)$ en P_0 , es la recta que tiene la dirección de $\vec{f}\,'(t_0)$ y a la que pertenece $\vec{\mathbf{P_0}}$.

$$t_{\mathbf{P0}} \rightarrow \boxed{\vec{X}=\vec{f}(t_0)+\lambda\vec{f}\,'(t_0)} \quad \text{(ec. vectorial de la recta tg.)}$$

o bien ,si $f_i'(t_0)\neq 0, \forall i \in \{1,2,3\}$:

$$\boxed{\frac{x-f_1(t_0)}{f_1'(t_0)}=\frac{y-f_2(t_0)}{f_2'(t_0)}=\frac{z-f_3(t_0)}{f_3'(t_0)}} \quad \text{(ecs. simétricas de la recta tangente)}$$

Si llamamos π_N al plano perpendicular a la recta tangente en $\mathbf{P_0}$, es decir al ***plano normal*** a la curva asociada a la imagen de $\vec{f}(t)$, resulta que la ecuación vectorial de π_N es:

$$\boxed{\left(\vec{X}-\vec{f}(t_0)\right)\cdot\vec{f}\,'(t_0)=0}$$

y la ecuación cartesiana:

$$\boxed{f_1'(t_o).(x-f_1(t_o))+f_2'(t_o).(y-f_2(t_o))+f_3'(t_o).(z-f_3(t_o))=0}$$

- ***Puntos regulares y singulares de una curva. Curvas regulares y lisas.***

Un punto $\vec{P}_0 \in C$ es un ***punto regular*** de C si y sólo si existe la recta tangente a C en $\vec{P}_0$. Para ello debe existir una función vectorial $\vec{f}$:[a,b] $\rightarrow \boldsymbol{R^n}$ *con* $n \geq 2$, continua / $\vec{f}(t) = (f_1(t);f_2(t);.....;f_n(t))$ *siendo C* la curva asociada a su imagen, tal que exista y no sea nulo el vector derivado $\vec{f}\,'(t_o)$ con $\vec{P}_0 = \vec{f}(t_0)$. Los puntos de C que no son regulares se llaman ***puntos singulares*** .

Toda curva admite distintas parametrizaciones, puede ocurrir que en alguna de ellas el vector derivado sea nulo, pero que no lo sea para otra.

Si $\vec{f}$ es inyectiva en [a,b], la curva es **simple.**

Si $\forall t \in [a,b]$ es $\vec{f}\,'(t)$ continua y distinta del vector nulo, entonces la curva C asociada al conjunto imagen de $\vec{f}$ es ***lisa.***

- ***Derivación de campos escalares***

Campos escalares de dos variables

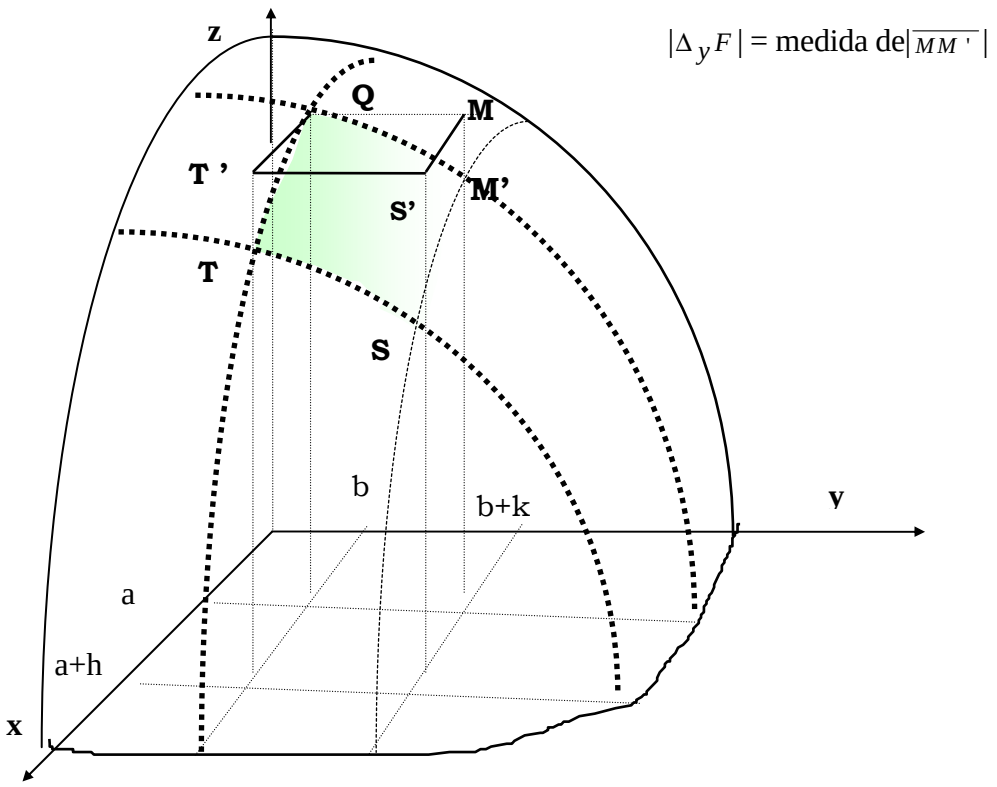
INCREMENTO PARCIAL Y TOTAL

Sea F: **A**$\rightarrow$**R**, con **A**$\subseteq$ $\mathbf{R^2}$ / z = F(x;y) y sea $\vec{P}_0$=(a;b) interior a **A**

Se llama **incremento parcial de "F " debido a "x"** (se escribe: $\Delta_x F$) al incremento que experimenta la función cuando se provoca una variación "h" ó "Δx" de la variable "**x**" y se mantiene constante la variable "y".

Es decir: $\Delta_x F$ = F(a + h ; b) - F(a;b)= F(a + Δx ; b) - F(a;b)

Gráficamente significa cortar la superficie representativa de z=F(x;y), con el plano y = b y medir la variación de la función sobre la curva intersección. En el dibujo: $|\Delta_x F|$= medida de $\overline{TT'}$



Con el mismo criterio, **la variación de "F" debida a "y",**($\Delta_y F$) se obtiene considerando x = cte y provocando un incremento "k" ó " Δy "sobre el eje "**y**".

Es decir: $\Delta_y F$ = F(a;b + k) - F(a;b)= F(a; b+ Δy) - F(a ; b)

Estos incrementos $\Delta_x F$ y $\Delta_y F$ reciben el nombre de **incrementos parciales.**
Si provocamos simultáneamente variaciones en x e y , que llamaremos "h" y "k",(ó Δx , Δy respectivamente) ,obtendremos el **incremento total** de F

Entonces : ΔF = F(a + h; b + k) - F(a;b)= F(a + Δx; b +Δy) - F(a;b)

Gráficamente este incremento mide la variación que experimenta z, sobre la curva que resulta de cortar la superficie representativa de z = F(x;y) con un plano perpendicular al plano xy, según la dirección de la recta P_0P con $\vec{P}$=(a + h; b+ k) (En el dibujo:|ΔF |= medida de $\overline{SS'}$).

- ***<u>Derivadas parciales</u>:***

Sea F: **A**→**R**, con **A**⊆ $\mathbf{R}^2$ / z = F(x;y) y sea $\vec{P}_0$=(a;b) interior a **A**

Se llama derivada parcial con respecto a x de F(x;y) en (a;b) (ó en $\vec{P}_0$), al límite para $\Delta x \to 0$, del cociente entre $\Delta_x F$ y Δx

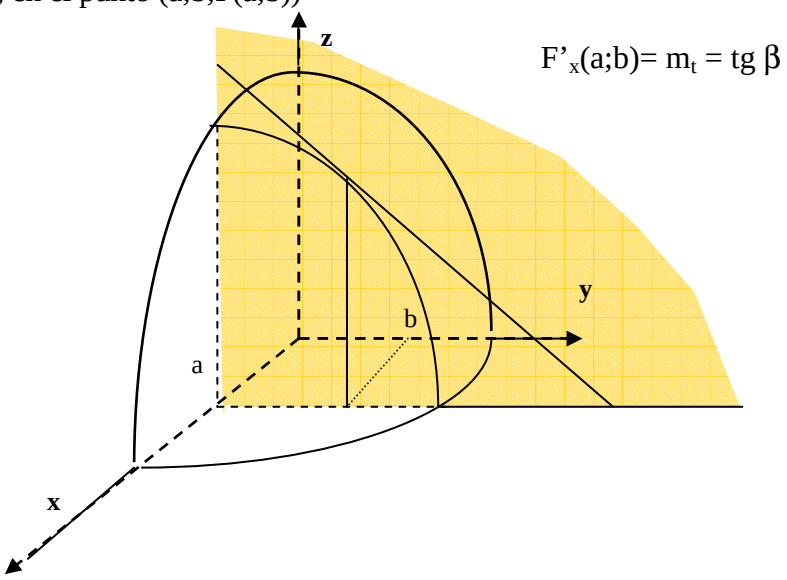
$$F'_x(a;b) = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{\vec{P}_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(a+\Delta x;b)-F(a;b)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{F(a+h;b)-F(a;b)}{h}$$

Análogamente:

$$F'_y(a;b) = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{\vec{P}_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(a;b+\Delta y)-F(a;b)}{\Delta y} = \lim_{k \to 0} \frac{F(a;b+k)-F(a;b)}{k}$$

Observemos que $F'_x(a;b)$ se calcula manteniendo y = cte y $F'_y(a;b)$, con x = cte.
De la definición se deduce que las reglas para calcular derivadas parciales son las mismas que se utilizan para calcular derivadas de funciones escalares.

Geométricamente las derivadas parciales representan las pendientes de las rectas tangentes a las curvas que se obtienen como intersección de la superficie con planos y= cte ó x = cte, según corresponda, en el punto (a;b;F(a;b))



Ejemplo:

Calcular las derivadas parciales en (0;0) de F(x;y)= $\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$

Recurrimos a la definición:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{\vec{P}_0} = \lim_{h\to 0} \frac{F(a+h;b)-F(a;b)}{h}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{(0;0)} = \lim_{h\to 0} \frac{F(0+h;0)-F(0;0)}{h} \Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{(0;0)} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h.0}{h^2+0^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{\vec{P}_0} = \lim_{k\to 0} \frac{F(a;b+k)-F(a;b)}{k} \Rightarrow \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{(0;0)} = \lim_{k\to 0} \frac{F(0;k)-F(0;0)}{k} \Rightarrow$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(0;0)} = \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{0.k}{0^2+k^2}-0}{k} = 0$$

<u>Observación</u>:
En la página 20, se trabajó con la misma función y se comprobó que no existe límite doble para (x;y)→(0;0), por lo tanto no es continua en (0;0).
Estos significa que, para campos escalares, la existencia de las derivadas parciales no es una condición tan fuerte como la derivabilidad para funciones de una variable.

En efecto, ***<u>para funciones escalares: derivabilidad⇒ continuidad; sin embargo, para campos escalares, este ejemplo nos muestra que un campo puede tener derivadas parciales en un punto en el que no es continuo.</u>***

Cuando no hay problemas en la definición de la función, puede derivarse utilizando las reglas y fórmulas conocidas. Para derivar respecto de **"x"** , se piensa que **"y"** es constante; mientras que para derivar respecto de **"y"**, se trabaja con **"x"** constante.

Por ejemplo:

Si F(x;y)= 2x.sen(xy)+ y^2 , resulta:

F'_x= 2 sen(x.y)+ 2xy cos(x.y) ; F'_y = $2x^2$cos(xy) + 2y.

- ***Derivada direccional***

Sean $F:A \subseteq R^n \to R$ con A abierto , $\vec{P}_o \in A$ y $\breve{v}$ versor de R^n

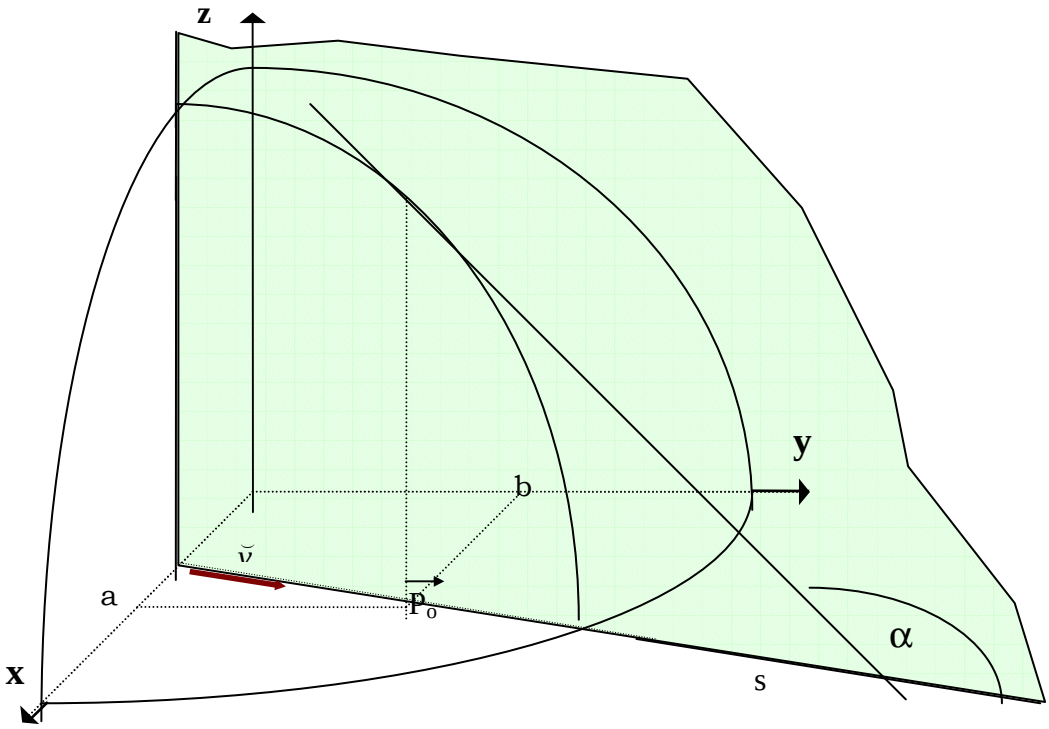
Definición

Si llamamos $\breve{v}$ al versor que tiene la dirección y sentido de $\overrightarrow{P_oP}$, podemos decir que existe $t \in \mathbf{R}$/ $\overrightarrow{P_oP} = t\ \breve{v}$. Entonces definimos como derivada direccional de F en la dirección de $\breve{v}$ en $\vec{P}_o$ al límite para $t \to 0$ de $\dfrac{F(\vec{P}_o + t\ \breve{v}) - F(\vec{P}_o)}{t}$. (La indicamos $F'(\vec{P}_o;\breve{v})$.

Resulta: $$F'(\vec{P}_o;\breve{v}) = \lim_{t \to 0} \frac{F(\vec{P}_o + t\ \breve{v}) - F(\vec{P}_o)}{t} \quad (\text{con } t \in \mathbf{R})$$

- ***Interpretación geométrica***

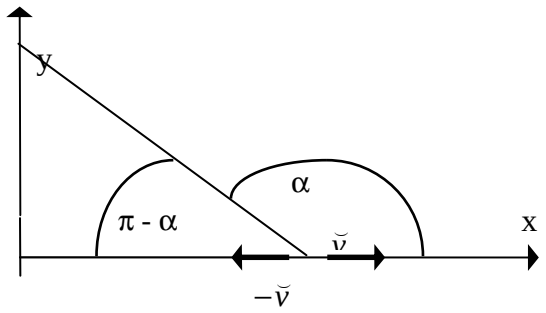
Al tomar una derivada direccional en un punto con respecto a un versor, se están considerando variaciones de la función sobre la recta que pasa por el punto y es paralela al versor.



La derivada direccional de F en $\vec{P}_o$ con respecto al versor $\breve{v}$, representa la pendiente de la recta tangente a la curva intersección entre la sup. representativa de z=F(x;y) y el plano paralelo al eje z, que corta al plano (x,y) según la recta s (es decir, la recta que pasa por $\vec{P}_o$ y es paralela al versor $\breve{v}$).

OBSERVACIONES :

a) Si se trabaja con el versor opuesto, si bien el punto es el mismo, la recta "s" también, y la curva intersección y , por lo tanto la recta tangente, no varían, **cambia** el ángulo que se vincula con la pendiente.



b) Si se toman las derivadas con respecto a los versores $\breve{i}$ y $\breve{j}$, se obtendrán las derivadas parciales respecto de x e y respectivamente.

Ejemplo:

Calcular F'($\vec{P}_o$; $\breve{v}$) siendo F(x;y) = x^2 –2xy; $\vec{P}_o$=(1;1) y $\breve{v} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$F'(\vec{P}_o;\vec{v}).=\lim_{t\to 0}\frac{F(\vec{P}_o+t\,\breve{v})-F(\vec{P}_o)}{t}\Rightarrow F'(\vec{P}_o;\vec{v}).=\lim_{t\to 0}\frac{F(1-t.\sqrt{2}/2;1+t.\sqrt{2}/2)-F(1;1)}{t}$$

$$F'(\vec{P}_o;\vec{v}).=\lim_{t\to 0}\frac{\left(1-t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\left(1-t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1+t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(1^2-2.1.1\right)}{t}$$

$$F'(\vec{P}_o;\vec{v}).=\lim_{t\to 0}\frac{\cancel{1}-t\sqrt{2}+t^2/2-\cancel{2}+t^2-\cancel{(-1)}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t.\left(-\sqrt{2}+t\,3/2\right)}{t}=-\sqrt{2}$$

- ***<u>Campos escalares en general</u>***

Consideremos F:**A**→ **R**, con **A**⊆**R**$^{\mathbf{n}}$, un punto $\vec{x}_0$interior a **A** y un vector unitario (versor) $\breve{v}$ de **R**$^{\mathbf{n}}$.

<u>Derivada direccional</u>

Llamamos derivada direccional de F en la dirección de $\breve{v}$ en $\vec{x}_0$ al límite para t→ 0 de $\frac{F(\vec{x}_0+t\,\breve{v})-F(\vec{x}_0)}{t}$. La indicamos F'($\vec{x}_0$;$\breve{v}$).

Resulta: $F'(\vec{x}_0;\breve{v}).=\lim_{t\to 0}\frac{F(\vec{x}_0+t\,\breve{v})-F(\vec{x}_0)}{t}$ (con t ∈ **R**)

- ***Derivada de un campo escalar respecto de un vector: Definición***

Consideremos F:**A**$\rightarrow$ **R**, con **A**$\subseteq$**R**$^{\mathbf{n}}$, $\vec{x}_0$ un punto interior a **A** y un vector $\vec{v}$ de **R**$^{\mathbf{n}}$.
Llamamos derivada de F en $\vec{x}_0$ con respecto a la dirección de $\vec{v}$ al límite, si existe de:

$$F'(\vec{x}_0;\vec{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{F(\vec{x}_0 + t.\vec{v}) - F(\vec{x}_0)}{t} \quad (\text{ con } t \in \mathbf{R})$$

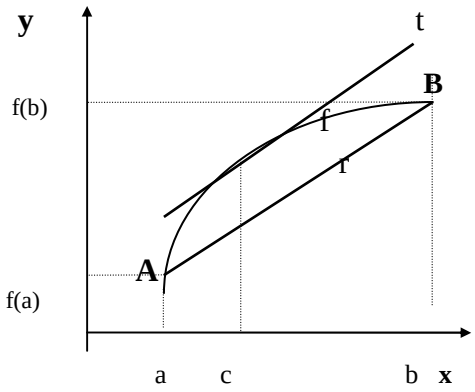
OBSERVACIÓN:
En la derivada direccional se trabaja con un vector unitario

En la derivada con respecto a un vector, se consideran vectores cualesquiera. Al calcular derivadas en un punto respecto de vectores de la forma $\alpha\breve{v}$ que, obviamente corresponden a la misma dirección, se obtienen, en un mismo punto distintos valores para la derivada .

- ***Teorema del valor medio***

Recordamos el teorema de Lagrange (o del valor medio del cálculo diferencial) para funciones escalares

Si f es continua en [a,b] , derivable en (a,b) , entonces existe un punto " c" interior al intervalo (a,b) tal que la variación que experimenta la función al pasar de "a" a "b" es igual al producto de la derivada de f en dicho punto "c" por la amplitud del intervalo.



Geométricamente significa que si f es continua en un intervalo cerrado [a,b] y derivable en (a,b), entonces existe un punto en el arco representativo de f) en el que la recta tangente es paralela a la cuerda que une los extremos del arco.

- ***Teorema del valor medio para campos escalares:***

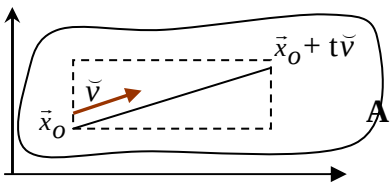
Consideremos F:**A**$\rightarrow$ **R**, con **A**$\subseteq$**R**$^{\mathbf{n}}$ tal que exista F' ($\vec{x}$**;** $\breve{v}$**)** en un subconjunto de **A** al que pertenezcan $\vec{x}_o$ y $\vec{x}_o + t\breve{v}$ **,** siendo $\breve{v}$ un vector unitario de **R**$^{\mathbf{n}}$.

Entonces se cumple que :

$\exists$ c$\in$ (0,t) / F($\vec{x}_o$+ t$\breve{v}$)- F($\vec{x}_o$) = t . F'($\vec{x}_o$ + c$\breve{v}$,$\breve{v}$)

Demostración**:**
Trabajaremos con la función de una variable φ (t) = F($\vec{x}_o$ + t$\breve{v}$) con t $\in$ [0,t]
Como existe F'($\vec{x}_o$**;** $\breve{v}$**)** en un subconjunto de **A** al que pertenezcan $\vec{x}_o$ y $\vec{x}_o$+ t$\breve{v}$

En R^2 sería:



Resulta:

- ♦ φ (t) continua en [0,t] (por que para funciones de una variable se cumple que si es derivable es continua)
- ♦ φ (t) derivable en (0,t) (trabajamos en [0,t] porque φ(0)=F($\vec{x}_o$)y φ (t)=F($\vec{x}_o$+ t$\breve{v}$)

Por el T. del valor medio para funciones de una variable, se cumple que:

∃ c entre 0 y t / φ (t) - φ (0) = t. φ‘ (c)

Calculamos , por def. φ’(c)

$$\varphi'(c) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\varphi(c+\lambda)-\varphi(c)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{F(\bar{x}_0 + (c+\lambda)\breve{v}) - F(\bar{x}_0 + c\breve{v})}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\varphi'(c) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{F[(\bar{x}_0 + c\breve{v}) + \lambda\breve{v}] - F(\bar{x}_0 + c\breve{v})}{\lambda} = F'(\bar{x}_0 + c\breve{v}; \breve{v})$$

Reemplazando se tiene que:

$$\boxed{\exists \text{ c entre 0 y t / } F(\vec{x}_o + t\breve{v}) - F(\vec{x}_o) = t \,.\, F'(\vec{x}_o + c\breve{v}; \breve{v})}$$

- ***<u>Propiedad de homogeneidad de la derivada direccional.</u>***

Consideremos F:**A**→ **R**, con **A**⊆**R**$^{\mathbf{n}}$, entonces ∀λ∈ **R,**∃ F’($\vec{x}_o$**;** λ$\breve{v}$**)** y se cumple que:
F’($\vec{x}_o$**;** λ$\breve{v}$**)** =λ F’($\vec{x}_o$**;**$\breve{v}$)

Demostración:
Por definición de derivada direccional:

$$F'(\vec{x}_o; \lambda\breve{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{F(\vec{x}_0 + t\lambda\,\breve{v}) - F(\vec{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \lambda \cdot \frac{F(\vec{x}_0 + t\lambda\,\breve{v}) - F(\vec{x}_0)}{\lambda\, t} =$$

multiplicamos y dividimos por λ

$$F'(\vec{x}_o; \lambda\breve{v}) = \lambda \lim_{t\to 0} \cdot \frac{F(\vec{x}_0 + t\lambda\,\breve{v}) - F(\vec{x}_0)}{\lambda\, t} = \lambda\, F'(\vec{x}_o; \breve{v})$$ (por def. de deriv.)

Luego: F’($\vec{x}_o$**;** λ$\breve{v}$**)** = λ F’ ($\vec{x}_o$**;**$\breve{v}$**)**

- ***<u>Aditividad de las derivadas direccionales</u>***

Consideremos un campo escalar F: **A**→ **R** con **A**⊆**R**$^{\mathbf{n}}$ ∧ n ≥ 2, y sean $\breve{u}$ y $\breve{v}$ dos versores de **R**$^{\mathbf{n}}$ respecto de los cuales F tiene derivadas direccionales continuas en $\vec{x}_o$
Si $\vec{w} = \breve{u} + \breve{v}$, entonces existe F’($\vec{x}_o$; $\vec{w}$) = F’($\vec{x}_o$; $\breve{u}$) + F’($\vec{x}_o$; $\breve{v}$)

Por definición de derivada respecto de un vector:

$$F'(\vec{x}_o; \vec{w}) = \lim_{t\to 0} \frac{F(\vec{x}_0 + t\vec{w}) - F(\vec{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{F(\vec{x}_0 + t(\breve{u} + \breve{v})) - F(\vec{x}_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{F(\vec{x}_0 + t\breve{u}) + t\breve{v}) - F(\vec{x}_0)}{t}$$

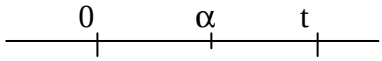
Sumamos y restamos en el numerador $F(\vec{x}_0 + t\,\breve{u})$ y agrupamos convenientemente , entonces:

$$F'(\vec{x}_o;\ \vec{w}) = \lim_{t\to 0} \frac{F[(\vec{x}_0 + t\breve{u}) + t\breve{v}] \boxed{- F(\vec{x}_0 + t\breve{u}) + F(\vec{x}_0 + t\breve{u})} - F(\vec{x}_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{F(\vec{x}_0 + t\breve{u}) - F(\vec{x}_0)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{F[(\vec{x}_0 + t\breve{u}) + t\breve{v}] - F(\vec{x}_0 + t\breve{u})}{t}$$

En el primer sumando tenemos, por definición: $F'(\vec{x}_o;\ \breve{u})$; y en el numerador del segundo aplicamos el T. del Valor medio:

$$F'(\vec{x}_o;\ \vec{w}) = F'(\vec{x}_o;\ \breve{u}) + \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}.\ F'[\vec{x}_0 + t\breve{u} + \alpha\breve{v};\ \breve{v}]}{\cancel{t}} \quad \text{con } \alpha \text{ entre 0 y t.}$$



Resulta que cuando $t\to 0$, también $\alpha\to 0$,entonces, por la continuidad pedida a las derivadas direccionales se tiene:

$$F'(\vec{x}_o;\ \vec{w}) = F'(\vec{x}_o;\ \breve{u}) + F'(\vec{x}_o;\ \breve{v})$$

- ***<u>Las derivadas parciales como casos particulares de derivadas direccionales</u>***

Si para el campo escalar F: $\mathbf{A}\to\mathbf{R}$ con $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{R}^n \wedge n \geq 2$, se calculan las derivadas direccionales con respecto a los versores de la base considerada, se obtienen las ***<u>derivadas parciales</u>***.

Es decir que si a $\vec{x}_o = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i\ \breve{e}_i$, se le aplica derivada de F en la dirección de $\mathbf{e_i}$ se obtiene la derivada parcial de F en la dirección de $\mathbf{e_i}$.

$$F'(\vec{x}_o, \breve{e}_i) = \lim_{t\to 0} \frac{F(\vec{x}_0 + t\,\breve{e}_i) - F(\vec{x}_0)}{t} = \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right]_{\vec{X}_0}$$

- ***<u>Cálculo de derivadas direccionales en función de las derivadas parciales</u>***

Consideremos un campo escalar F: $\mathbf{A}\to\mathbf{R}$ con $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{R}^n \wedge n \geq 2$, y sea $\breve{v}$ un versor de $\mathbf{R}^n$. Supongamos además que F tiene derivadas parciales continuas en $\vec{x}_o$.

Como las componentes de un versor son los cosenos directores del mismo:

$\breve{v} = \sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \ \breve{e}_i$, utilizando las propiedades de homogeneidad y aditividad de las derivadas direccionales se tiene:

$$F'(\vec{x}_o;\ \breve{v}) = F'(\vec{x}_o;\ \sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \ \breve{e}_i\ ) = \sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \ F'(\vec{x}_o;\ \breve{e}_i)$$

Para campos escalares de tres variables, con derivadas parciales continuas es:

$$F'(\vec{x}_o;\ \breve{v}) = F'_x(\vec{x}_o).\cos\alpha_1 + F'_y(\vec{x}_o).\cos\alpha_2 + F'_z(\vec{x}_o).\cos\alpha_3$$

siendo $\breve{v} = \cos\alpha_1\ \mathbf{i} + \cos\alpha_2\ \mathbf{j} + \cos\alpha_3\ \mathbf{k}$

- ***<u>Gradiente</u>***

Consideremos un campo escalar F: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{R}$ con $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}^n \wedge n \geq 2$ con derivadas parciales respecto de todas sus variables en todo punto de $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}^n$.

Se llama ***<u>gradiente de F</u>*** al campo vectorial definido de **B** en $\mathbf{R}^n$ mediante:

$$\overrightarrow{\text{Grad. F}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2}; \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) .$$

También se utiliza para designarlo al "operador" nabla: $\vec{\nabla} F = \overrightarrow{\text{Grad. F}}$

<u>Relación entre el vector gradiente y la derivada direccional</u>

Consideremos F: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{R}$ con $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}^n \wedge n \geq 2$, ,sea $\breve{v}$ un versor de $\mathbf{R}^n$ expresado a partir de sus cosenos directores, Es decir: $\breve{v} = \sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \ \breve{e}_i$

Supongamos además que F tiene derivadas parciales continuas en $\vec{x}_o$.punto interior de **A**.

Vimos que la derivada direccional puede expresarse en función de las derivadas parciales

$$F'(\vec{x}_o;\ \breve{v}) = \sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i . \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right]_{\vec{x}_0} .$$

Como el vector gradiente de F en $\vec{x}_o$es: $\vec{\nabla} F(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right] . \breve{e}_i$, se tiene que la derivada direccional en $\vec{x}_o$es igual al producto escalar entre el vector gradiente de F en $\vec{x}_o$y el versor $\breve{v}$ **.** Significa que la derivada direccional en $\vec{x}_o$ es la proyeccción del $\vec{\nabla} F\ (\vec{x}_o)$ sobre $\breve{v}$ **.**

$\text{Proy}_{\breve{v}}\ (\vec{\nabla} F(\vec{x}_0)) = \vec{\nabla} F(\vec{x}_0) . \breve{v}$ (pues proyectar un vector sobre otro significa multiplicarlo escalarmente por el versor correspondiente)

Pero el segundo miembro coincide con la fórmula obtenida para la derivada direccional, entonces:

$$\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}\right|(\vec{x}_0) = \vec{\nabla} F(\vec{x}_0).\overset{\vee}{v}}$$

Si F tiene derivadas parciales continuas en $\vec{x}_o$ la derivada direccional de F en la dirección de $\vec{v}$ en $\vec{x}_o$ es igual a la proyección del vector gradiente de F en $\vec{x}_o$ sobre $\overset{\vee}{v}$.
(*Recordar que la proyección de un vector sobre otro es un* ***número***).

Ejemplo:
Verificamos el resultado obtenido en la página 31

Calcular $F'(\vec{P}_o;\overset{\vee}{v})$ siendo $F(x;y) = x^2 - 2xy$; $\vec{P}_o=(1;1)$ y $\overset{\vee}{v} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Como F es polinómica, podemos asegurar que tiene derivadas parciales continuas y, por lo tanto es válido aplicar la fórmula de derivada direccional en función del gradiente.

$$\left.\begin{array}{ll} F'_x = 2x-2y & \Rightarrow F'_x(\vec{P}_o)=0 \\ F'_y = -2x & \Rightarrow F'_y(\vec{P}_o)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\nabla} F(\vec{P}_o) = (0;-2)$$

Resulta: $F'(\vec{P}_o;\overset{\vee}{v}) = \Rightarrow \vec{\nabla} F(\vec{P}_o)\cdot\overset{\vee}{v} = (0;-2)\cdot\left(\frac{-\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$

Por otra parte , la proyección de un vector sobre otro es máxima cuando las direcciones de ambos coinciden; mínima cuando los vectores son de la misma dirección pero tienen sentidos opuestos y nula cuando las direcciones son perpendiculares. Entonces:

- ***La derivada direccional es máxima en la dirección y sentido del vector gradiente. Como en ese caso cosα = 1, resulta que el valor de la máxima derivada direccional en un punto es el del módulo del gradiente en dicho punto.***

  $$\text{máx.}\left.\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}\right|(\vec{x}_0) = \left|\vec{\nabla} F(\vec{x}_0)\right|$$

- ***La derivada direccional es mínima en la dirección del vector gradiente pero en sentido opuesto. Como en ese caso cosα = - 1, resulta que el valor de la mínima derivada direccional en un punto es menos el módulo del gradiente en dicho punto.***

  $$(\text{mín.}\left.\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}\right|(\vec{x}_0) = -\left|\vec{\nabla} F(\vec{x}_0)\right|$$

- ***La derivada direccional en un punto es cero en la dirección perpendicular a la del vector gradiente en dicho punto. (Las direcciones son perpendiculares si y sólo si el producto escalar es nulo).***

(Para campos escalares de dos variables, recordar que cos α_2 = sen α_1)

Ejemplos:

Dados los siguientes campos escalares y el punto $\vec{P_o}$ que en cada caso se indica, hallar la o las direcciones en las que la derivada direccional en $\vec{P_o}$ es máxima .

a) F(x;y)= $\frac{1}{x}-\frac{x^2}{y}$ en $\vec{P_o}$ =(2;-2)

$$\left.\begin{array}{l} F'_x=\frac{-1}{x^2}-\frac{2x}{y} \\ F'_y=\frac{x^2}{y^2} \end{array}\right\}$$ continuas en $\vec{P_o}$,la dirección de máxima derivada está dada por el vector gradiente en $\vec{P_o}$

$\vec{\nabla} F(\vec{P_o})$ =(-5/2;1)

Luego la dirección de máxima derivada es $\overset{\vee}{v}=\frac{\vec{\nabla}F(\vec{P_o})}{\left\|\vec{\nabla}F(\vec{P_o})\right\|}=\frac{\left(\frac{-5}{2};1\right)}{\frac{\sqrt{29}}{2}}=\left(\frac{-5}{\sqrt{29}};\frac{1}{\sqrt{29}}\right)$

b)[1]F(x;y)=$\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{si } (x;y)=(0;0)\end{cases}$ en $\vec{P_o}$ =(0;0)

Por la forma en que está definida la función, es más sencillo obtener la derivada direccional por definición que analizar si las derivadas parciales son o no continuas.

Supongamos que consideramos un versor genérico de R^2 , $\overset{\vee}{u}=(h;k)$.
Resulta:

$$F'(\vec{P_o};\overset{\vee}{u})=\lim_{t\to 0}\frac{F(\vec{P_o}+t\overset{\vee}{u})-F(\vec{P_o})}{t}\Rightarrow F'(\vec{P_o};\overset{\vee}{u})=\lim_{t\to 0}\frac{F(th;tk)-F(0;0)}{t}$$

$$F'(\vec{P_o};\overset{\vee}{u})=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{th.(tk)^2}{(th)^2+(tk)^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3hk^2}{t^2(h^2+k^2)}}{t}=\frac{hk^2}{h^2+k^2}=hk^2$$ pues $h^2+k^2=1$,

ya que $\overset{\vee}{u}=(h;k)$ es un versor.

[1] Ejercicio de final. Tema 11 .1.b)

Este resultado nos permite asegurar que la función tiene derivada en cualquier dirección y sentido. Podemos escribir esta derivada en función de h:

$F'(\vec{P}_o;\check{u}) = h(1-h^2) = h-h^3$

Como se pide la o las direcciones en la que la derivada direccional es máxima, y la función a maximizar es de una variable, se buscará el valor de h que anula la derivada primera y que hace negativa a la derivada segunda.
Es decir:

Sea $\varphi(h) = h - h^3$, entonces $\varphi'(h) = 1-3h^2$

$1-3h^2 = 0 \Rightarrow |h| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Pero $\varphi''(h) = -6h$, permite asegurar que la derivada direccional es máxima cuando $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Como $|k| = \sqrt{1-h^2}$, se tiene $|k| = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Entonces las direcciones en la que la derivada direccional es máxima son: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

NOTA: Obsérvese que si se trabaja con el vector gradiente, la dirección de máxima derivada en un punto es única. El haber obtenido dos direcciones indica que la fórmula del gradiente no es aplicable en este caso.

<u>Derivación de campos vectoriales</u> :

- ***<u>Derivada direccional: Definición</u>***

Consideremos $\vec{F}: A \to R^m$, con $A \subseteq R^n$, $(n \geq 2, m \geq 2)$, un punto $\vec{X}_0 = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ interior a A, $\vec{v}$ un vector de R^n, $\check{v}$ su correspondiente versor.

Llamamos derivada direccional de $\vec{F}$ en la dirección de $\check{v}$ en $\vec{X}_o$, al límite para $t \to 0$ de $\frac{\vec{F}(\vec{X}_0 + t\check{v}) - \vec{F}(\vec{X}_o)}{t}$.

La indicamos $\vec{F}'(\vec{X}_0;\check{v})$.

Resulta: $\vec{F}'(\vec{X}_0;\check{v}) = \lim_{t \to 0} \frac{\vec{F}(\vec{X}_0 + t\check{v}) - \vec{F}(\vec{X}_o)}{t}$ con $t \in R$

Derivación de campos vectoriales

- ***Derivada de un campo vectorial respecto de un vector.***

Llamamos derivada direccional de $\vec{F}$ en $\vec{X}_o$, con respecto al vector $\breve{v}$, al límite para $t \to 0$ de $\dfrac{\vec{F}(\vec{X}_0 + t\vec{v}) - \vec{F}(\vec{X}_o)}{t}$.

Es decir: $\vec{F}\,'(\vec{X}_0;\vec{v}).= \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\vec{F}(\vec{X}_0 + t\vec{v}) - \vec{F}(\vec{X}_o)}{t}$ con $t \in R$

Observación: al igual que en los campos escalares, en las derivadas direccionales se trabaja con vectores unitarios. En las derivadas respecto de un vector, se consideran vectores cualesquiera. Al calcular derivadas en un punto respecto de vectores de la forma $\alpha.\breve{v}$ que, obviamente corresponden a la misma dirección, se obtienen en un mismo punto, distintos valores para la derivada.

- ***Propiedades de las derivadas direccionales de campos vectoriales***

Sea $\vec{F}: A \to R^m$, con $A \subseteq R^n$, $(n \geq 2, m \geq 2)$/ $\vec{F}(\vec{X}) = (F_1(\vec{X}); F_2(\vec{X}); \ldots; F_m(\vec{X}))$.

1) Con una demostración similar a la realizada para funciones vectoriales se tiene que:
$\vec{F}'(\vec{X},\breve{v}) = (F_1'(\vec{X},\breve{v}); F_2'(\vec{X},\breve{v}); \ldots . F_m'(\vec{X},\breve{v}))$

2) Si las F'_i (con $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ son continuas en $\vec{X}_0$, para cada componente vale la homogeneidad y la aditividad de la derivada direccional para campos escalares, entonces:

a) $\vec{F}\,'(\vec{X}_0, \lambda\breve{v}) = (F_1'(\vec{X}_0,\lambda\breve{v}); F_2'(\vec{X}_0,\lambda\breve{v}); \ldots; F_{m,}'(\vec{X}_0,\lambda\breve{v})) =$
$= \left(\lambda F_1'(\vec{X}_0,\breve{v}); \lambda F_2'(\vec{X}_0,\breve{v}); \ldots \lambda F_m'(\vec{X}_0,\breve{v})\right) =$
$= \lambda.\left(F_1'(\vec{X}_0,\breve{v}); F_2'(\vec{X}_0,\breve{v}); \ldots; F_m'(\vec{X}_0,\breve{v})\right) = \lambda.\vec{F}\,'\left(\vec{X}_0;\breve{v}\right)$

b) Si $\breve{u}$ y $\breve{v}$ son versores de R^n y $\vec{w} = \breve{u} + \breve{v}$, entonces:

$$\vec{F}\,'\left(\vec{X}_0;\vec{w}\right) = \vec{F}\,'\left(\vec{X}_0;\breve{u}\right) + \vec{F}\,'\left(\vec{X}_0;\breve{v}\right)$$

- ***Derivadas parciales de campos vectoriales***

Si para el campo vectorial $\vec{F}: A \to R^m$, con $A \subseteq R^n$, $(n \geq 2, m \geq 2)$, se calculan las derivadas direccionales respecto de los versores de la base canónica, se obtienen las ***derivadas parciales***.

Consideremos $\vec{X}_0 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j.\breve{e}_j$. A la derivada direccional de $\vec{F}$ con respecto a $\breve{e}_j$, se la llama derivada parcial de $\vec{F}$ con respecto a x_j .

$$\vec{F}'(\vec{X}_o;\breve{e}_j)=\left.\frac{\partial\vec{F}}{\partial x_j}\right]_{\vec{X}_0}=\lim_{t\to 0}\frac{\vec{F}\left(\vec{X}_0+t\breve{e}_j\right)-\vec{F}(\vec{X}_0)}{t}=\begin{pmatrix}\left.\frac{\partial F_1}{\partial x_j}\right]_{\vec{X}_0}\\ \left.\frac{\partial F_2}{\partial x_j}\right]_{\vec{X}_0}\\ \vdots\\ \left.\frac{\partial F_m}{\partial x_j}\right]_{\vec{X}_0}\end{pmatrix}$$

- ***<u>Matriz jacobiana o matriz derivada</u>***

Sea el campo vectorial $\vec{F}:A\to R^m$, con $A\subseteq R^n$, $(n\geq 2, m\geq 2)$, se llama matriz jacobiana o matriz derivada a la matriz mxn cuyas filas son las derivadas parciales de cada una de las componentes de $\vec{F}$. La matriz jacobiana está definida en aquellos puntos de A en los que están definidas todas las derivadas parciales de las componentes de $\vec{F}$. La filas de la matriz jacobiana son los gradientes de cada componente. Las columnas son los vectores derivados del campo respecto de cada una de las variables.

$$D[\vec{F}(\vec{X})]=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Dado el campo vectorial $\vec{F}:R^3\to R^2 / \vec{F}(x;y;z)=(2x^2y+z;2z^2x+3y)$, se pide su matriz derivada.

Consideramos $\vec{F}(x;y;z)=\left(F_1(x;y;z);F_2(x;y;z)\right)$, entonces:

$$D[\vec{F}(\vec{X})]=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\end{pmatrix}\Rightarrow D[\vec{F}(\vec{X})]=\begin{pmatrix}4xy & 2x^2 & 1\\ 2z^2 & 3 & 4zx\end{pmatrix}$$

- ***<u>Cálculo de derivadas direccionales en función de las derivadas parciales</u>***

Consideremos un campo vectorial $\vec{F}$:**A**$\rightarrow$ **R**$^{\mathbf{m}}$, con **A**$\subseteq$**R**$^{\mathbf{n}}$,(**n** $\geq$ 2 ; **m** $\geq$2) , un punto $\vec{X}_0$ interior a **A ,** y un versor $\breve{v} = \sum_{j=1}^{n} \cos\alpha_j \,.\, \breve{e}_j$ de **R**$^{\mathbf{n}}$

Supongamos además que $\vec{F}\ (\vec{X}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{X}) \\ F_2(\vec{X}) \\ \vdots \\ F_m(\vec{X}) \end{pmatrix}$ tiene derivadas parciales continuas en $\vec{X}_0$,

entonces $\forall$ i $\in$ { 1,2,....,m} , $F'_i\,(\vec{X}_0;\breve{v}) = \vec{\nabla} F_i(\vec{X}_0)\ .\breve{v} = \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right]_{\vec{X}_0} .\cos\alpha_j$.

Luego: $\vec{F}'(\vec{X}_0;\breve{v}) = \begin{pmatrix} F_1'(\vec{X}_0;\breve{v}) \\ F_2'(\vec{X}_0;\breve{v}) \\ \vdots \\ F'_m(\vec{X}_0;\breve{v}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} F_1(\vec{X}_0).\breve{v} \\ \vec{\nabla} F_2(\vec{X}_0).\breve{v} \\ \vdots \\ \vec{\nabla} F_m(\vec{X}_0).\breve{v} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\vec{F}'(\vec{X}_0;\breve{v}) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right]_{\vec{X}_0} & \left.\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right]_{\vec{X}_0} & \cdots & \left.\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\right]_{\vec{X}_0} \\ \left.\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right]_{\vec{X}_0} & \left.\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right]_{\vec{X}_0} & \cdots & \left.\frac{\partial F_2}{\partial x_n}\right]_{\vec{X}_0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left.\frac{\partial F_m}{\partial x_1}\right]_{\vec{X}_0} & \left.\frac{\partial F_m}{\partial x_2}\right]_{\vec{X}_0} & \cdots & \left.\frac{\partial F_m}{\partial x_n}\right]_{\vec{X}_0} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \\ \vdots \\ \cos\alpha_n \end{pmatrix} = D[\vec{F}(\vec{X}_0)]\,.\breve{v}$$

Luego , si $\vec{F}$ tiene derivadas continuas en $\vec{X}_0$ se cumple que:

$$\boxed{\vec{F}'(\vec{X}_0;\breve{v}) = D[\vec{F}(\vec{X}_0)]\,.\breve{v}}$$

Derivadas sucesivas o iteradas.

- ***De funciones vectoriales***

La derivada de $\vec{f} : \mathbf{A} \to \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ con $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R} / \vec{f}(t) = (f_1(t); f_2(t); \cdots; f_m(t))$ se obtiene derivando cada una de las componentes que son funciones escalares.

Por lo tanto si las f_i con $i \in \{1,2,...m\}$ tienen derivadas n-simas, podremos definir la derivada n-sima de $\vec{f}$ mediante: $\vec{f}^{(n)}(t) = \left(f_1^{(n)}(t); f_2^{(n)}(t); ....f_m^{(n)}(t)\right)$

- ***De campos escalares.***

Sea F:**A**→**R** con $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$. Las derivadas parciales de F están definidas para todo punto de $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$. Por lo tanto, para cada una de ellas podrá analizarse la existencia de sus derivadas parciales que, si existen, serán las derivadas segundas de F. Así sucesivamente, podrán definirse las derivadas n- simas de F.
Un campo escalar de n variables puede tener n derivadas primeras y en consecuencia n^2 derivadas segundas, n^3 derivadas terceras,....., n^k derivadas k-simas. Bajo ciertas condiciones, algunas de las derivadas iteradas son iguales.

Sea $F:R^2 \to R/ F(x;y)= x^2y + 3xy$, podemos calcular

$F'_x(x;y)= 2xy + 3y$ $\qquad$ $F'_y(x;y)=x^2 + 3x$

Cada una de estas funciones puede ser derivada respecto de cada una de sus variables, permitiéndonos obtener cuatro derivadas segundas:

$$\frac{\partial F'_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = F'_{xx} = 2y$$

$$\boxed{\frac{\partial F'_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F'_{yx} = 2x + 3}$$

$$\boxed{\frac{\partial F'_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = F'_{xy} = 2x + 3}$$

$$\frac{\partial F'_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = F'_{yy} = 0$$

Las recuadradas son las que llamaremos derivadas cruzadas. Como vemos en este ejemplo resultan iguales.

Analicemos esas derivadas en (0;0) para el campo $F:R^2 \to R/$

$$F(x;y)=\begin{cases} \dfrac{3yx^2 - 2xy^2}{x+y} & \text{si } (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

Debemos calcular las derivadas primeras. Si lo hacemos por fórmula para $(x;y) \neq (0;0)$ y por definición en el origen obtenemos:

$$F'_x(x;y)=\begin{cases}\dfrac{3yx^2+6xy^2-2y^3}{(x+y)^2} & \text{si } (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{si } (x;y)=(0;0)\end{cases} \quad y$$

$$F'_y(x;y)=\begin{cases}\dfrac{3x^3-4x^2y-2xy^2}{(x+y)^2} & \text{si } (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{si } (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

Entonces

$$F''_{xy}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{F'_x(0;k)-F'_x(0;0)}{k}\Rightarrow$$

$$F'_{xy}(0;0)=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{3k.0^2+6.0.k^2-2k^3}{(0+k)^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-2k^3}{k^3}=\boxed{-2}$$

Del mismo modo:

$$F''_{yx}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{F'_y(h;0)-F'_y(0;0)}{h}\Rightarrow$$

$$F'_{yx}(0;0)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{3h^3-4.h^2.0-2h.0^2}{(h+0)^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^3}{h^3}=\boxed{3}$$

En este ejemplo, como vemos las derivadas cruzadas en (0;0) son distintas.

- ***Teorema de Schwarz***

Consideremos un campo escalar de dos variables F : **A**→**R** con **A** $\subseteq$ **R²** / existan F'_x , F'_y y F''_{xy} en un entorno de $\vec{X}_0=(x_0;y_0)$ punto interior de **A.**
Entonces, si F''_{xy} es continua en $\vec{X}_0$, existe F''_{yx} y se cumple que $F''_{yx}(\vec{X}_0)=F''_{xy}(\vec{X}_0)$.

(En el ejemplo falla la continuidad de las derivadas primeras

La propiedad subsiste para cualquier número de variables, ya que en la derivación respecto de dos de ellas se mantienen constantes las demás. Si se cumplen las hipótesis del T. de Schwarz , de las n^2 derivadas segundas que tiene un campo escalar de n variables , sólo $\frac{n(n+1)}{2}$ son distintas.

Pueden enunciarse condiciones similares para las derivadas sucesivas de orden superior. Si tales condiciones se cumplen , el número de derivadas k-simas distintas será el de

combinaciones con repetición de “n” elementos tomados de a “k”., es decir el número combinatorio $\binom{n+k-1}{k}$

Por ejemplo, un campo escalar de 3 variables (n = 3), tiene 15 derivadas parciales distintas de cuarto orden (k= 4).

- ***De campos vectoriales***

Debe considerarse que las derivadas de campos vectoriales surgen de derivar cada componente y las componentes de un campo vectorial son campos escalares.

DIFERENCIABILIDAD

<u>Para "refrescar" conocimientos previos...</u>

1. *¿Qué es una transformación lineal?*

Dados dos espacios vectoriales U y V no vacíos, una función $T:U \to V$ es una transformación lineal (T.L)si y sólo si se cumple:

- $\forall \vec{x} \in U, \forall \vec{y} \in U : T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$
- $\forall \lambda \in R, \forall \vec{x} \in U : T(\lambda . \vec{x}) = \lambda . T(\vec{x})$

Algunos ejemplos para tener en cuenta:

- Las T.L definidas de R en R son del tipo T(x)= k.x . Es decir , el gráfico de una T.L de R en R es una recta que pasa por el origen.

- Las T.L definidas de R^2 en R son del tipo: T(x;y)= ax+by .Es decir , el gráfico de una T.L de R^2 en R es un plano que pasa por el origen.

- En general, las T.L definidas de R^n en R son polinomios del tipo :

$$T(x_1; x_2; ...; x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i . x_i \ (*)$$

- Por ser polinómicas, las T.L definidas de R^n en R, son funciones continuas.

2. *¿Cómo se define una transformación lineal?*

Para definir una transformación lineal alcanza con conocer las imágenes de los vectores de una base del dominio. Como nosotros trabajaremos siempre con la base canónica, resulta que en (*): $T(\vec{e}_i) = a_i$ [1].

Cada T.L tiene una matriz asociada respecto de las bases consideradas en el dominio y el recorrido.
Si el dominio es de dimensión n y el recorrido de dimensión m, la matriz asociada es mxn.
Si en ambos se toma la base canónica, los vectores columna de la matriz asociada a la T.L. son las imágenes de los vectores de la base canónica del dominio.
Por ejemplo: Si $T: R^2 \to R^3$ es la T. L definida por T(x;y)=(2x;3y;x-y), resulta T(1;0)=(2;0;1) y T(0;1)=(0;3;-1), entonces la matriz asociada a la T.L es

$$: M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

---

[1] $\vec{e}_i$ = (0,...,0,1,0,...0) (El 1 ocupa el lugar "i")

- ***Diferenciabilidad: Introducción***

Para funciones escalares el concepto de derivabilidad en un punto (existencia del límite finito para el cociente incremental) es lo suficientemente fuerte como para asegurar la continuidad de la función en ese punto y la existencia de la recta tangente al gráfico asociado a dicha función.

Sin embargo, ya vimos que para campos escalares la existencia de derivadas parciales no permite asegurar la continuidad. Podemos mostrar con un ejemplo que tampoco permite asegurar la existencia de plano tangente.

Sea $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \,/\; F(x;y) = x^{1/3} y^{1/3}$.

Por definición pueden calcularse las dos derivadas parciales en (0;0):

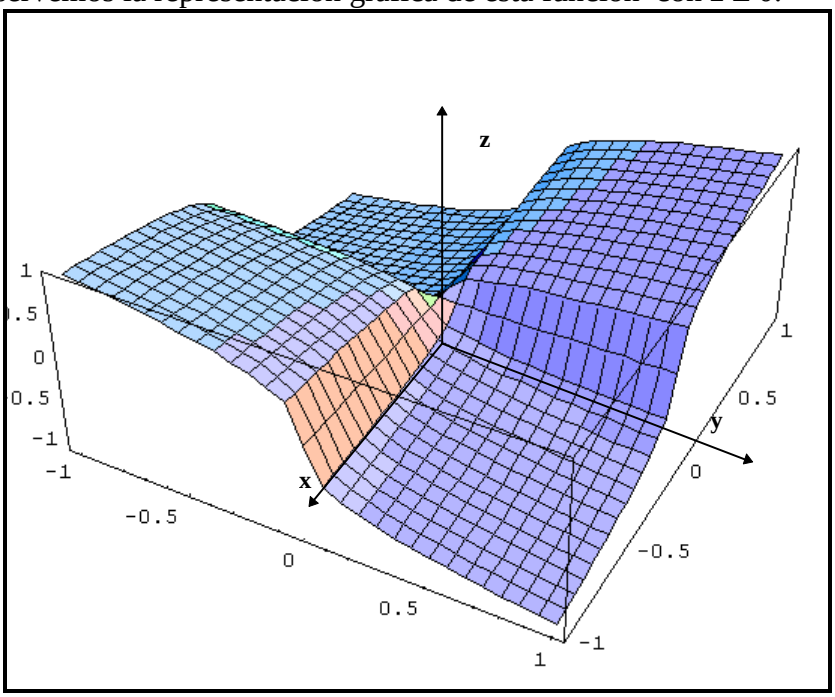
$$F'_x(0;0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(h;0)-F(0;0)}{h} \quad \Rightarrow \quad F'_x(0;0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}.0^{1/3}-0}{h} = 0$$

$$F'_y(0;0) = \lim_{k\to 0} \frac{F(0;k)-F(0;0)}{k} \quad \Rightarrow \quad F'_y(0;0) = \lim_{k\to 0} \frac{h^{1/3}.0^{1/3}-0}{h} = 0$$

Es decir, en (0;0) existen las dos derivadas parciales y son iguales a 0. Según la interpretación geométrica de la derivada parcial, esto significa que al cortar la superficie representativa de la función con los planos y=0 ó x = 0 , se obtienen curvas tales que sus rectas tangentes en (0;0;0) son el eje **x** y el eje **y** respectivamente.

Si el plano tangente a la superficie en (0;0;0) existe, debe contener a estas dos rectas y por lo tanto el plano tangente debería ser el plano xy.

Observemos la representación gráfica de esta función con $z \geq 0$.



Es evidente que en (0;0;0) no existe plano tangente aunque existan las derivadas parciales.

Para funciones escalares : "diferenciabilidad $\Leftrightarrow$ derivabilidad", pero la derivabilidad asegura continuidad y existencia de recta tangente. Acabamos de mostrar que la existencia de derivadas parciales no tiene el mismo significado y podríamos mostrar ejemplos en que la existencia de derivada en cualquier dirección t sentido tampoco permita asegurarlo.

Trataremos de generalizar la definición de función diferenciable, para construir un concepto equivalente a la derivabilidad en funciones de una variable

- ***Diferencial de una función escalar en un punto***

Consideremos una función f derivable en x_0; esto significa que existe y es finito el límite del cociente incremental.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\Rightarrow\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+\varphi(x),\ \text{con}\ \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0$$

Si una función tiene límite finito para $x\to x_0$, entonces puede escribirse como la suma de su límite más un infinitésimo para $x\to x_0$

Resulta:

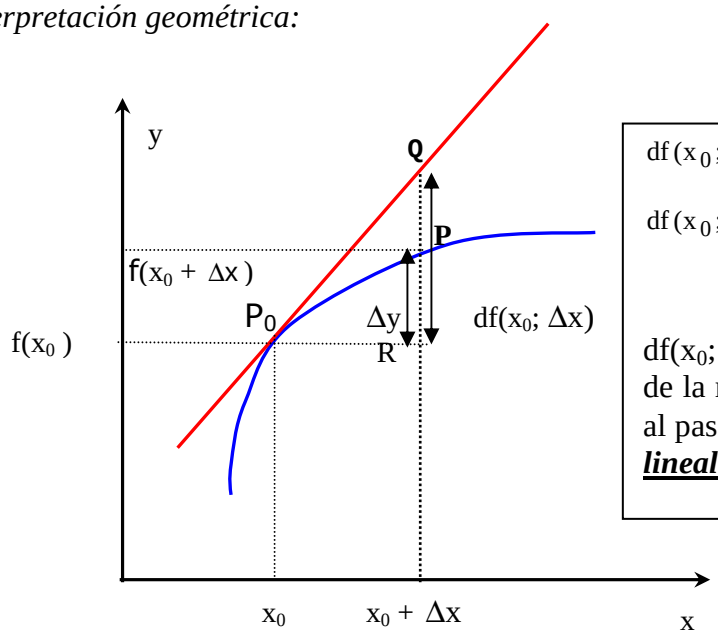
$$f(x)-\underbrace{f(x_0)=f'(x_0)}_{\Delta y}.(x-\underbrace{x_0)+\varphi(x)}_{\Delta x}.(x-\underbrace{x_0)}_{\Delta x},\ \text{con}\ \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0\quad,\ \text{o bien:}$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0).(x-x_0)+\varphi(x).(x-x_0),\ \text{con}\ \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=0\ \ (**)$$

<u>*Definición*</u>*:*
Dada una función f derivable en x_o, punto interior de su dominio, se llama diferencial de f en el punto x_0 con respecto al incremento Δx al producto de la derivada de f en x_0 por.
En símbolos:

$$\boxed{df(x_0;\ \Delta x)=f'(x_0).\ \Delta x}$$

Interpretación geométrica:



$$df(x_0;\Delta x) = f'(x_0).\Delta x \Rightarrow$$

$$df(x_0;\Delta x) = tg\,\alpha.\Delta x = \frac{|\overline{RQ}|}{\Delta x}\cdot\Delta x = |\overline{RQ}|$$

$df(x_0; \Delta x)$ representa la variación de ordenada de la recta tangente a la curva en $P_0(x_0; f(x_0))$, al pasar de x_0 a $x_0 + \Delta x$. Es una ***aproximación lineal*** de la variación de la función.

Teniendo en cuenta (**), podemos decir que f es diferenciable en x_0 si y sólo si en un entorno de x_o se verifica que:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0) + \varphi(x).(x - x_0), \quad \text{con} \quad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$$

Para generalizar esta definición a campos escalares, analicemos qué representa el primer término del segundo miembro. Como f '(x_o) es una constante, podemos decir que la diferencial de f en x_o es una transformación lineal de R en R en la que la variable es $\Delta x = x - x_o$

Resulta entonces que:

f es diferenciable en x_0 si y sólo si existe una transformación lineal $T: R \to R$ tal que:

$$f(x) - f(x_0) = T(x - x_0) + \varphi(x).(x - x_0), \quad \text{con} \quad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$$

Esta es la expresión que generalizaremos para definir diferenciabilidad de campos escalares y/o vectoriales.

- ***Campos escalares diferenciables***

Sea F: $\mathbf{A} \to \mathbf{R}$, con $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}^n$ y sea $\vec{x}_0$ punto interior de $\mathbf{A}$.

Decimos que es F diferenciable en $\vec{x}_0$ si y sólo si existe una transformación lineal $T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tal que :

$$F(\vec{x}) - F(\vec{x}_0) = T(\vec{x} - \vec{x}_0) + \varphi(\vec{x} - \vec{x}_0).\|\vec{x} - \vec{x}_0\| \quad \text{con} \quad \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \varphi(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

<u>Propiedades de los campos escalares diferenciables</u>.

Sea *F:* $\mathbf{A} \to \mathbf{R}$, con $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R^n}$ diferenciable en $\vec{x}_0$, punto interior del abierto $\mathbf{A}$

- ***Continuidad***

Si *F* es diferenciable en $\vec{x}_0$ entonces es continua en $\vec{x}_0$.Debe probarse que $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} F(\vec{x}) = F(\vec{x}_0)$

En efecto:
F diferenciable en $\mathbf{x_o} \Rightarrow \exists$ $T:\mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$ / T es transformación lineal y:

$$F(\vec{x}) - F(\vec{x}_0) = T(\vec{x} - \vec{x}_0) + \varphi(\vec{x} - \vec{x}_0).\|\vec{x} - \vec{x}_0\| \text{ con } \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \varphi(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

$$\Rightarrow^* \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} [F(\vec{x}) - F(\vec{x}_0)] = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} [T(\vec{x} - \vec{x}_0) + \varphi(\vec{x} - \vec{x}_0).\|\vec{x} - \vec{x}_0\|] =$$

$$= \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} T(\vec{x} \to \vec{x}_o) + \underbrace{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_o} \varphi(\vec{x} - \vec{x}_o).\left\|\vec{x} - \vec{x}_o\right\|}_{\to 0}$$

Como las transformaciones linealesde R^n en R son funciones continuas, por ser polinómicas entonces

$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} T\ (\vec{x} - \vec{x}_0) = T(\vec{0}) = 0$ (por prop. de las T.L.)

Reemplazando en (*) se tiene : $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \left(F(\vec{x}) - F(\vec{x}_0)\right) = O \Rightarrow \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} F(\vec{x}) = F(\vec{x}_0)$

Por lo tanto *F* continua en $\vec{x}_0$

- ***Derivabilidad***

Existencia de las derivadas parciales

Si *F*: $\mathbf{A} \to \mathbf{R}$ con $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R^n}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ entonces tienen derivadas parciales en $\vec{x}_0$ y la matriz asociada a la transformación lineal es la matriz jacobiana en dicho punto

Demostración:
F diferenciable en $\vec{x}_0 \Rightarrow \exists$ $T:\mathbf{R^n} \to \mathbf{R}$ / T es transformación lineal y:

$$F(\vec{x}) - F(\vec{x}_0) = T(\vec{x} - \vec{x}_0) + \varphi(\vec{x} - \vec{x}_0).\|\vec{x} - \vec{x}_0\| \text{ con } \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \varphi(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0 \quad (1)$$

Si M es la matriz asociada a T, debe ser 1xn, o sea : $M=(a_{11}\ a_{12}.....a_{1n})$

Para hallar los elementos de esa matriz debemos calcular la imagen de los vectores de una base. Tomaremos la canónica.

Sea $\breve{e}_k$ el k-simo versor de la base canónica de $\mathbf{R^n}$, $T(\breve{e}_k) = a_{1k}$ $(k \in \{1,2,...,n\})$

Probaremos que $a_{1\,k} = \left.\dfrac{\partial F}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_o}$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_0} = \lim_{h \to 0} \frac{F(\vec{x}_0 + h.\ \breve{e}_k) - F(\vec{x}_0)}{h} \qquad (*)$$

Si hacemos : $\vec{x} = \vec{x}_0 + h.\breve{e}_k$, se tiene: $\vec{x} - \vec{x}_0 = h.\breve{e}_k$, y $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| = \|h.\breve{e}_k\| = |h|.1$

resulta, en (1):

$$F(\vec{x}_0 + h.\breve{e}_k) - F(\vec{x}_0) = T(h.\breve{e}_k) + \varphi(h.\breve{e}_k).|h| \quad \text{con} \quad \lim_{h \to 0} \varphi(h.\breve{e}_k) = 0$$

Si $\vec{x} \to \vec{x}_0$,se tiene que $h \to 0$. Reemplazamos en (*)

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_0} = \lim_{h \to 0} \frac{F(\vec{x}_0 + h\,\breve{e}_k) - F(\vec{x}_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{T(h.\breve{e}_k)}{h} + \lim_{h \to 0} \underbrace{\varphi(h.\breve{e}_k)}_{\text{infinitésimo x f. acotada}} \overset{\pm 1}{\frac{|h|}{h}}$$

Por definición de transformación lineal: $T(h.\breve{e}_k) = h.T(\breve{e}_k) = h.a_{1k}$

Por lo tanto: $\left.\dfrac{\partial F}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_0} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h.a_{1k}}{h} + 0 = a_{1k} \Rightarrow \left.\dfrac{\partial F}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_o} = a_{1k}$ con $k \in \{1,2,....,n\}$

Entonces F tiene derivadas parciales en $\vec{x}_0$ y la matriz asociada a la transformación lineal es :

$$M = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\right]_{\vec{x}_0} & \left.\dfrac{\partial F}{\partial x_2}\right]_{\vec{x}_0} & \cdots & \left.\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right]_{\vec{x}_0} \end{pmatrix}$$

- ***Existencia de todas las derivadas direccionales***

Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ con $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R^n}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ y $\breve{v} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \\ \vdots \\ \cos\alpha_n \end{pmatrix}$ es un versor cualquiera de $\mathbf{R^n}$,

entonces existe $F'(\vec{x}_0; \breve{v})$.

En efecto, por definición de derivada direccional:

$$F'(\vec{x}_0;\breve{v})=\lim_{t\to 0}\frac{F(\vec{x}_0+t\breve{v})-F(\vec{x}_0)}{t}\quad (*)\ .$$

Como F es diferenciable en $\vec{x}_0$, resulta:

$$F(\vec{x})-F(\vec{x}_0)=T(\vec{x}-\vec{x}_0)+\varphi(\vec{x}-\vec{x}_0).\|\vec{x}-\vec{x}_0\| \text{ con } \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\varphi(\vec{x}-\vec{x}_0)=0$$

Si hacemos $\vec{x}=\vec{x}_0+t.\breve{v}$ (o bien : $\vec{x}-\vec{x}_0=t.\breve{v}$), se tiene que cuando $\vec{x}\to\vec{x}_0$ resulta $t\to 0$, y por lo tanto:

$$F(\vec{x}_0+t.\breve{v})-F(\vec{x}_0)=T(t.\breve{v})+\varphi(t.\breve{v}).\|t.\breve{v}\| \text{ con } \lim_{t\to 0}\varphi(t.\breve{v})=0$$

Teniendo en cuenta que $\|t.\breve{v}\|=|t|.\|\breve{v}\|=|t|.1$ y que por ser T una transformación lineal es: $T(t.\breve{v})=t.T(\breve{v})$ se tiene:

$$F(\vec{x}_0+t.\breve{v})-F(\vec{x}_0)=tT(\breve{v})+\varphi(t.\breve{v}).|t| \text{ , con } \lim_{t\to 0}\varphi(t.\breve{v})=0$$

Si reemplazamos en (*), resulta:

$$F'(\vec{x}_0;\breve{v})=\lim_{t\to 0}\frac{F(\vec{x}_0+t\breve{v})-F(\vec{x}_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t.T(\breve{v})+\varphi(t.\breve{v}).|t|}{t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{t.T(\breve{v})}{t}+\varphi(t.\breve{v})\underbrace{\frac{|t|}{t}}_{\text{infinit.x f. acot}}\right)$$

$$F'(\vec{x}_0;\breve{v})=T(\breve{v})=\left(\left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right]_{\vec{x}_0}\quad \left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right]_{\vec{x}_0}\quad \cdots\quad \left.\frac{\partial F}{\partial x_n}\right]_{\vec{x}_0}\right).\begin{pmatrix}\cos\alpha_1\\ \cos\alpha_2\\ \vdots\\ \cos\alpha_n\end{pmatrix}$$

Es decir, podemos asegurar que si F es diferenciable en $\vec{x}_0$ tiene derivadas direccionales para cualquier $\breve{v}$ versor de $\mathbf{R^n}$ y se verifica que:

$$\boxed{F'(\vec{x}_0;\breve{v})=\vec{\nabla}F(\vec{x}_0).\breve{v}}$$

<u>Condición suficiente para que un campo escalar sea diferenciable</u>

Si $F:\mathbf{A}\to\mathbf{R}$ con $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{R^n}$ tiene derivadas parciales continuas en un entorno de $\vec{x}_0$, entonces F es diferenciable en $\vec{x}_0$.
Por el T. del valor medio:

$$F(\vec{x}_0+t.\breve{v})-F(\vec{x}_0)=t\,.F'(\vec{x}_0+c.\breve{v};\breve{v}) \text{ con } o<c<t, \text{ siendo } \breve{v}=(\cos\alpha_1;\cos\alpha_2;\cdots;\cos\alpha_n)$$

Pero si F tiene derivadas parciales continuas en $\vec{x}_0 + c.\breve{v}$, la derivada direccional puede expresarse en función de ellas :

$$F'(\vec{x}_0 + c.\breve{v};\breve{v}) = \vec{\nabla} F(\vec{x}_0 + c.\breve{v}).\breve{v} = \sum_{k=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial F}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_0 + c\breve{v}} .\cos\alpha_k \right)$$

$$F(\vec{x}_0 + t.\breve{v}) - F(\vec{x}_0) = t.\sum_{k=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial F}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_0 + c\breve{v}} .\cos\alpha_k \right) \quad (*)$$

Si $\left.\frac{\partial F}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_0}$ es continua en $\vec{x}_0$, $\lim\limits_{c\to 0} \left.\frac{\partial F}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_0 + c.\breve{v}} = \left.\frac{\partial F}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_0}$ $\Rightarrow$por prop. de límite finito:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_0 + c\breve{v}} = \left.\frac{\partial F}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_0} + \varepsilon_k(c.\breve{v}.) \text{ siendo } \lim_{c\to 0} \varepsilon_k(c.\breve{v}) = 0$$

Reemplazando en (*):

$$F(\vec{x}_0 + t.\breve{v}) - F(\vec{x}_0) = t.\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\left.\frac{\partial F}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_0} + \varepsilon_k(c.\breve{v}) \right).\cos\alpha_k \right]$$

$$F(\vec{x}_0 + t.\breve{v}) - F(\vec{x}_0) = t.\sum_{k=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial F}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_0} .\cos\alpha_k \right) + \sum_{k=1}^{n}(t.\varepsilon_k(c.\breve{v}).\cos\alpha_k)$$

con $\lim\limits_{c\to 0} \varepsilon_k(c.\breve{v}) = 0$

Multiplicamos y dividimos cada término de la segunda sumatoria por | t |

$$F(\vec{x}_0 + t.\breve{v}) - F(\vec{x}_0) = t.\sum_{k=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial F}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_0} .\cos\alpha_k \right) + \sum_{k=1}^{n}(|t|.\frac{t}{|t|}\varepsilon_k(c.\breve{v}).\cos\alpha_k)$$

$$= t.\sum_{k=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial F}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_0} .\cos\alpha_k \right) + |t|.\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(\frac{t}{|t|}\varepsilon_k(c.\breve{v}).\cos\alpha_k)}_{\varphi(c.\breve{v}.)}$$

siendo $\lim\limits_{c\to 0} \left(\underbrace{\frac{t}{|t|}}_{\pm 1} \varepsilon_k(c,\breve{v})\cos\alpha_k \right) = 0$ por ser prod. de infinitésimo x f. acotadas

$$F(\vec{x}_0 + t.\breve{v}) - F(\vec{x}_0) =. \sum_{k=1}^{n} \left(\left. \frac{\partial F}{\partial x_k} \right]_{\vec{x}_0} .t\cos\alpha_k \right) + |t|.\varphi\,(\,c.\breve{v}\,.)$$

con $\lim\limits_{c \to 0} \varphi\,(\,c.\breve{v}.)=0$ (suma de un núm finito de infinitésimos.)

Pero el primer término del segundo miembro puede escribirse como $\vec{\nabla}F(\vec{x}_0).t\breve{v}$ que es la expresión de una T.L de R^n en R aplicada a $t.\overset{v}{v}$.

Por lo tanto, se puede asegurar que existe una T.L definida de R^n en R tal que:

$$F(\vec{x}_0 + t.\breve{v}) - F(\vec{x}_0) = T(\,t.\overset{v}{v}\,) + \,|\,t\,|.\left\|\overset{v}{v}\right\|.\ \ \varphi\,(\,c.\breve{v}.)\,,\quad \text{con } \lim_{c \to 0} \varphi\,(\,c.\breve{v}.)=0$$

$\Rightarrow$ *F* es diferenciable en $\vec{x}_0$ (por definición)

<u>NOTA:</u> *Las propiedades demostradas para campos escalares son válidas para campos vectoriales*

- ***<u>Diferencial total de un campo escalar: Definición:</u>***

Consideremos $\boldsymbol{F}:\mathbf{A}\to\mathbf{R}$ con $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R^n}$ y $\vec{x}_0$ punto interior del abierto $\mathbf{A}$, si $\boldsymbol{F}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$, se cumple que existe una transformación lineal T:$\mathbf{R^n}\to\mathbf{R}$ tal que:

$$F(\vec{x}) - F(\vec{x}_o) = T(\,\vec{x} - \vec{x}_o\,) + \left\|\vec{x} - \vec{x}_o\right\|.\varphi(\vec{x} - \vec{x}_o)\,,\ \text{con} \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} \varphi(\vec{x} - \vec{x}_o) = 0$$

siendo la matriz asociada a *T*, la matriz jacobiana de $\boldsymbol{F}$ en el punto $\vec{x}_0$.

<u>*Definición:*</u>

Se llama ***diferencial total*** *de* $\boldsymbol{F}$ *en* $\vec{x}_0$ *a la transformación lineal* $T(\vec{x} - \vec{x}_0)$.

Es decir: $\boxed{d\,\boldsymbol{F}\,\vec{x}_0 = T(\vec{x} - \vec{x}_0)}$

o sea:

$$\boxed{d\,F\,\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}\left(\vec{X}_0\right)\left(x_i - x_{i0}\right) = \sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}\left(\vec{X}_0\right) dx_i}$$

- ***Interpretación geométrica de la diferencial. Ecuación del plano tangente a una superficie***

Consideremos $F:\mathbf{A}\to\mathbf{R}$ con $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{R}^2$ diferenciable en $\vec{P}_0$. Entonces se cumple que:

$$F(x_0+h;\, y_0+k) = \underbrace{F(x_0;y_0) + F'_x(x_0;y_0)\,h + F'_y(x_0;y_0).\,k}_{F(x_0;y_0)\,+\,dF(x_0;y_0)} + \varphi(h;k).\sqrt{h^2+k^2}\ ,\ \text{siendo}\ \lim_{(h;k)\to(0;0)} \varphi(h;k)=0$$

Como la diferencia entre $F(x_0+h;\, y_0+k)$ y $F(x_0;y_0) + dF(x_0;y_0)$ es un infinitésimo para $(h;k)\to(0;0)$, se puede considerar que la segunda expresión es una "buena aproximación lineal de $F(x_0+h;\, y_0+k)$.

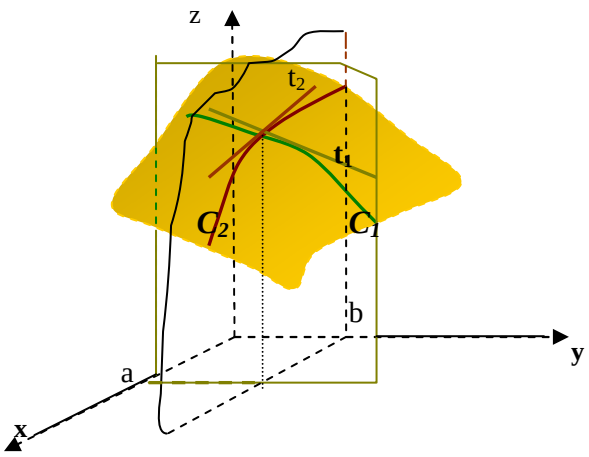
Probaremos que, efectivamente, esta aproximación lineal da la ecuación del plano tangente a la superficie definida por z= z=F(x;y) en $\vec{P}_0=(x_0;y_0;\, F(x_0;y_0))$

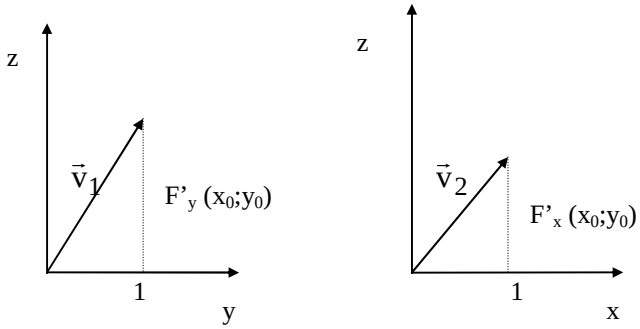
Se llama plano tangente a la superficie en $\vec{P}_0$ al lugar geométrico de las rectas tangentes a todas las curvas a las que pertenece dicho punto y están sobre las superficie.

Hallaremos, en primer lugar, la ecuación del plano determinado por dos de esas rectas.

Consideremos la curva C_1 determinada por la intersección de la superficie con el plano x = a. Llamaremos t_1 a la recta tangente a C_1 en $\vec{P}_0$. Un vector paralelo a t_1 es:

$\vec{v}_1 = 0\,\breve{i} + 1\breve{j} + F'_y(x_o;y_o)\,\breve{k}$





Si C_2 es la curva intersección entre la superficie y el plano y = b, y t_2 es la recta tangente a C_2 en P_0 , un vector paralelo a t_2 es $\vec{v}_2 = 1.\breve{i} + 0.\breve{j} + F'_x(a;b)\breve{k}$

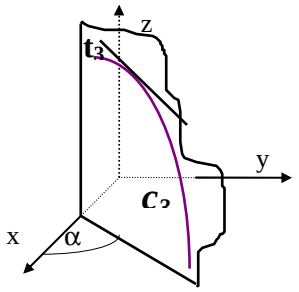
La ecuación del plano que pasa por P_o y es paralelo a los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$

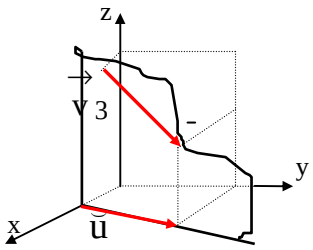
es: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-F(x_0;y_0) \\ 0 & 1 & F'_y(x_0;y_0) \\ 1 & 0 & F'_x(x_0;y_0) \end{vmatrix} = 0$, es decir: $F'_x(x_o;y_o).(x-x_0) + F'_y(x_0;y_o)(y-y_0)-[z-F(x_0;y_0)] = 0$

Probaremos, además que cualquier otra recta tangente en P_o a una curva sobre la superficie, está incluida en ese plano.

Sea C_3 la curva intersección de la superficie con un plano que pasa por P_o ,es perpendicular al plano (x,y) , tal que la traza sobre dicho plano forma un ángulo α con el semieje positivo de las x. Si t_3 es la tangente a dicha curva en P_o , un vector paralelo a t_3 es:

$$\vec{v}_3 = \underbrace{\cos\alpha\ \breve{i} + \operatorname{sen}\alpha\ \breve{j}}_{\breve{u}} + F'_{\breve{u}}(x_0;y_0)\ \breve{k}$$





Para probar que t_3 está incluida en el plano determinado por t_1 y t_2, debemos probar que el producto mixto entre $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ es cero.

En efecto:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & F'_y(x_0;y_0) \\ 1 & 0 & F'_x(x_0;y_0) \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & F'_{\breve{u}}(x_0;y_0) \end{vmatrix} = F'_x(x_0;y_0).\cos\alpha + F'_y(x_0;y_0).\operatorname{sen}\alpha - F'_{\breve{u}}(x_0;y_0) = 0$$

pues si F(x;y) es diferenciable en $(x_0;y_0)$, los dos primeros términos permiten calcular la derivada direccional de F en $(x_0;y_0)$, con respecto a la dirección que forma un ángulo α con el semieje positivo de las x, por lo tanto : $F'_x(x_0;y_0)\cos\alpha + F'_y(x_0;y_0)\ \operatorname{sen}\alpha - F'_{\breve{u}}(x_0;y_0) = 0$, con lo que queda probado que las rectas tangentes en P_o, a las curvas que están sobre la superficie son coplanares.
En síntesis, resulta:

Ecuación del plano tangente a la superficie definida por z= F(x;y) , en $(x_0;y_0;F(x_0;y_0))$:

$$\mathbf{z - F(x_0;y_0) = F'_x(x_0;y_0)\ (x - x_0) + F'_y(x_0;y_0).\ (y - y_0)}$$

Ecuación de la recta normal a la superficie definida por z= F(x;y)), en $(x_0;y_0;F(x_0;y_0))$:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0;y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0;y_0)} = \frac{z - F(x_0;y_0)}{-1}$$

Por otra parte, observemos que el segundo miembro en la ecuación del plano tangente es igual a la diferencial del campo.

Esto significa que ***la diferencial de la función en $(x_0;y_0)$ representa la variación que experimenta la "z" del plano tangente a la superficie representativa de z = F(x;y) en $(x_0;y_0;F(x_0;y_0))$ cuando se pasa de $(x_0;y_0)$ a otro punto (x;y).***

- ***Diferenciabilidad de un campo vectorial***

Sea $\vec{F}: \mathbf{A} \to \mathbf{R^m}$, con $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R^n}$ y sea $\vec{x}_0$ punto interior de **A**.

Decimos que es $\vec{F}$ diferenciable en $\vec{x}_0$ si y sólo si existe una transformación lineal $\vec{T}: \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^m}$ tal que :

$$\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{x}_o) = T(\vec{x} - \vec{x}_o) + \left\| \vec{x} - \vec{x}_o \right\| . \varphi(\vec{x} - \vec{x}_o) \text{ con } \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_o} \varphi(\vec{x} - \vec{x}_o) = \vec{0}$$

- ***Propiedades***

Consideremos $\vec{F}: \mathbf{A} \to \mathbf{R^m}$ con $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R^n}$ y $\vec{x}_0$ punto interior del abierto **A,** entonces:

a)Si $\vec{F}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$, se cumple:
a.1.- $\vec{F}$ es continua en $\vec{x}_0$
a.2.- $\vec{F}$ tiene derivadas parciales en $\vec{x}_0$
a.3.- $\vec{F}$ tiene derivadas direccionales en $\vec{x}_0$, para cualquier versor de $\mathbf{R^n}$.

b) Si $\vec{F}$ tiene derivadas parciales continuas en un entorno de $\vec{x}_0$, $\vec{F}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$.

DERIVACIÓN DE FUNCIONES COMPUESTAS

- ***Composición de funciones***

Si consideramos funciones escalares, funciones vectoriales, campos escalares y campos vectoriales, no siempre es posible hacer la composición.
Veamos algunos ejemplos:

a) La composición de dos funciones escalares, si es posible , da por resultado una función escalar.
b) No es posible componer dos campos escalares, ni dos funciones vectoriales .
c) En algunos casos es posible obtener la composición de dos campos vectoriales y el resultado es otro campo vectorial. Si $\vec{F}$:$\mathbf{R^2}\rightarrow\mathbf{R^3}$ y $\vec{G}$: $\mathbf{R^3}\rightarrow\mathbf{R^2}$, resulta : $\vec{F}\circ\vec{G}$: $\mathbf{R^3}\rightarrow\mathbf{R^3}$ y $\vec{G}\circ\vec{F}$: $\mathbf{R^2}\rightarrow\mathbf{R^2}$
d) Si f: $\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ y $\vec{g}$: $\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R^2}$, puede obtenerse $\vec{g}\circ$f: $\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R^2}$
(El resultado es una función vectorial)
e) Si $\vec{F}$:$\mathbf{R^2}\rightarrow\mathbf{R^3}$ y $\vec{g}$: $\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R^2}$, puede obtenerse $\vec{F}\circ\vec{g}$: $\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R^3}$, que es una función vectorial.
(Pensar más combinaciones posibles.)

- ***Derivación de funciones compuestas***

➢ ***Para funciones escalares***

Si resulta de componer una función vectorial con un campo escalar de dos variables.

Consideremos un campo escalar de dos variables *F*: $\mathbf{R^2}\rightarrow\mathbf{R}$ / z = *F(x;y)* diferenciable en (x_o; y_o) , y una función vectorial $\vec{g}$:$\mathbf{B}\rightarrow\mathbf{R^2}$, con $\mathbf{B}\subseteq\mathbf{R}$/ $\vec{g}$(t) = (x(t) ; y(t)) siendo **x(t) e y(t) derivables** en t_o , y además (x_o; y_o) =(x(t_o); y(t_o)) = $\vec{g}(t_0)$
Entonces, si existe $F\circ\vec{g}$, resulta derivable en t_o y se cumple que:

$$\left.\frac{d(F_0\vec{g})}{dt}\right]_{t_0} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{(x_0;y_0)}.x'(t_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{(x_0;y_0)}.y'(t_0)=\vec{\nabla}F(x_0;y_0)\,.\,\vec{g}\,'(t_0)$$

Demostración :

Como F es diferenciable en (x_o; y_o), se cumple que:
F (x_o + h; y_o + k) - F (x_o; y_o)= h . F'$_x$ (x_o; y_o) + k. F'$_y$ (x_o; y_o) + φ (h;k).$\sqrt{h^2+k^2}$
con $\lim\limits_{(h;k)\rightarrow(0;0)} \varphi(h;k)=0$

Como h = Δx y k =Δy, y Δz = F (x_o + h; y_o + k) - F (x_o; y_o) ; se tiene:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}F'_x(x_o;y_0)+\frac{\Delta y}{\Delta t}.F'_y(x_o;y_0) + \varphi\,(h;k).\frac{\sqrt{\Delta^2 x+\Delta^2 y}}{\Delta t}$$

con $\lim\limits_{(h;k)\rightarrow(0;0)} \varphi(h;k)=0$

Tomamos en ambos miembros límite para Δt→0.

Como por hipótesis x(t) e y(t) son derivables en t_o, los cocientes Δx /Δt y Δy/Δt tienden a las derivadas de x(t) e y(t) en t_o.

Resulta :

$$\lim_{\Delta t \mapsto 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = x'(t_0).\, F'_x(x_o; y_o) + y'(t_0).\, F'_y(x_o; y_o) + \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \varphi(h;k)}_{0}.\sqrt{x'(t_o) + y'(t_o)}$$

pues como x(t) e y(t) son continuas, por ser derivables, resulta $h=\Delta x \to 0$ y $k=\Delta y \to 0$

Pero el primer miembro, por definición es la derivada de z con respecto a *t* en t_0, de donde:

$$\boxed{\left.\frac{d(F_0\vec{g})}{dt}\right]_{t_0} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{(x_0;y_0)} .x'(t_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{(x_0;y_0)} .y'(t_0)}$$

➢ *Si resulta de componer una función vectorial con un campo escalar de n variables*

Consideremos un campo escalar F:**A**$\to$**R** con **A**$\subseteq$ **R**$^{\mathbf{n}}$, diferenciable en $\vec{X}_0$, y una función vectorial $\vec{g}$:**B**$\to$**R**$^{\mathbf{n}}$, con **B**$\subseteq$ **R**/ $\vec{g}(t) = (x_1(t) ; x_2(t);....x_n(t))$ siendo $x_i(t)$ **derivables** en t_o para $i \in \{1,2,..,n\}$, y además $\vec{X}_0 = \vec{g}(t_0)$ Entonces se cumple que $F \circ \vec{g}]'(t_0) = \vec{\nabla}F(\vec{X}_0) \circ \vec{g}'(t_0)$.

- ***<u>Para campos escalares</u>***

(Resultado de componer un campo vectorial con un campo escalar)

Consideremos un campo escalar F: **R**$^{\mathbf{n}}$ $\to$**R** , diferenciable en $\vec{P}_0$, y un campo vectorial $\vec{G}$: **R**$^{\mathbf{m}}$$\to$ **R**$^{\mathbf{n}}$ diferenciable en $\vec{X}_0 = (x_{10}; x_{20}; \cdots; x_{m0})$, siendo $\vec{G}(\vec{x}_0) = \vec{P}_0$.

Entonces existe $\left.\frac{\partial(F \circ \vec{G})}{\partial x_k}\right]_{\vec{x}_0} = \vec{\nabla}F(\vec{P}_0).\, \vec{G}'_{x_k}(\vec{x}_0)$, o bien

$$\vec{\nabla}(F \circ \vec{G})(\vec{X}_0) = \vec{\nabla} F(\vec{P}_0).\begin{pmatrix} \left.\frac{\partial G_1}{\partial x_1}\right]_{\vec{x}_0} & \left.\frac{\partial G_1}{\partial x_2}\right]_{\vec{x}_0} & \cdots & \left.\frac{\partial G_1}{\partial x_m}\right]_{\vec{x}_0} \\ \left.\frac{\partial G_2}{\partial x_1}\right]_{\vec{x}_0} & \left.\frac{\partial G_2}{\partial x_2}\right]_{\vec{x}_0} & \cdots & \left.\frac{\partial G_2}{\partial x_m}\right]_{\vec{x}_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left.\frac{\partial G_n}{\partial x_1}\right]_{\vec{x}_0} & \left.\frac{\partial G_n}{\partial x_2}\right]_{\vec{x}_0} & \vdots & \left.\frac{\partial G_n}{\partial x_m}\right]_{\vec{x}_0} \end{pmatrix}$$,es decir:

$$\boxed{\vec{\nabla}(F \circ \vec{G})(\vec{x}_0) = \underbrace{\vec{\nabla} F(\vec{P}_0).}_{1xn}\ \underbrace{D[G(\vec{x}_0)]}_{nxm}}$$

- ***Para campos vectoriales***

(Resultado de componer un campo vectorial con un campo vectorial)

Consideremos un campo vectorial $\vec{F}$: $\mathbf{R^n} \to \mathbf{R^p}$,/ $\vec{F}(\vec{P}) = (F_1(\vec{P}); F_2(\vec{P}); \cdots; F_p(\vec{P}))$ diferenciable en $\vec{P}_0$, y un campo vectorial $\vec{G}$: $\mathbf{R^m} \to \mathbf{R^n}$ /$\vec{G}(\vec{x}) = (G_1(\vec{x}); G_2(\vec{x}); \cdots; G_n(\vec{x}))$ diferenciable en $\vec{x}_0 = (x_{10}; x_{20}; \cdots; x_{m0})$, siendo $\vec{G}\ (\vec{x}_0) = \vec{P}_0$.

Entonces: $\underbrace{D[\vec{F} \circ \vec{G}](\vec{x}_0)}_{p \times m} = \underbrace{D[\vec{F}](\vec{P}_0)}_{p \times n} . \underbrace{D[\vec{G}](\vec{P}_0)}_{n \times m}$

- ***<u>Derivar usando una red orientada de variables</u>***

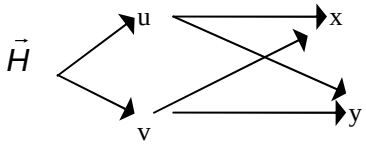
Esta red puede armarse para cualquier composición de funciones que pueda hacerse y facilita la visualización de la vinculación que existe entre las variables.

Por ejemplo:
Sean:
$\vec{F}$: $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$ / $\vec{F}(u;v) = (u\ .\ sen\ v;\ u\ cosv;\ u)$ y $\vec{G}$: $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$ / $\vec{G}(x;y) = (x^2 - y^2; y.sen\ x)$

Podemos obtener $\vec{H} = \vec{F} \circ \vec{G}$: $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$

En ese caso es : $u = x^2 - y^2$
$v = y.\ sen\ x$

Entonces:



Para obtener la matriz derivada asociada a la composición debemos derivar en el orden que indica la red , cada componente de $\vec{F}$ respecto de **"x"** y respecto de **"y"**, pasando por u y v.

$\vec{H}(x;y) = (H_1(x;y); H_2(x;y); H_3(x;y))$

$$\frac{\partial H_i}{\partial x} = \frac{\partial F_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial H_i}{\partial y} = \frac{\partial F_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Entonces:

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = sen\ v.\ 2x + u.\cos v.\ y\cos x \quad ; \quad \frac{\partial H_1}{\partial y} = sen\ v.(-2y) + u.\cos v.\ sen\ x$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} = \cos v.\ 2x + u.(-sen\ v).\ y\cos x \quad ; \quad \frac{\partial H_2}{\partial y} = \cos v.(-2y) + u.(-sen\ v).\ sen\ x$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial x} = 1.2x + 0.\ y\cos x \quad ; \quad \frac{\partial H_3}{\partial x} = 1.(-2y) + 0.\ sen\ x$$

Por lo tanto: $D[\vec{H}(x;y)] = \begin{pmatrix} 2x.sen\ v + u.y.\cos v.\cos x & -2y\ sen\ v + u.\cos v.sen\ x \\ 2x\cos v - uy\ sen\ v.\cos x & -2y\cos v - u.sen\ v.sen\ x \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$

DERIVACIÓN DE FUNCIONES DEFINIDAS IMPLÍCITAMENTE POR UNA ECUACIÓN

- ***Introducción***

En Análisis I , se trabajó con funciones escalares definidas implícitamente, sin analizar las condiciones que deben cumplirse para su existencia.:

F(x;y)=0 define implícitamente a "y" como función de "x" (es decir: y = f(x)) en un entorno de x=a, si y sólo si :$\forall x \in E(a) : F(x;f(x))=0$.
Pero no cualquier F(x;y) =0 define una y = f(x).
Por ejemplo : $x^2 + y^2 = -1$ no define ninguna función de $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{R}$ con $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}$

También se vio como obtener f ' (x) sin pasar a la forma explícita de f(x).

Ejemplo: Obtener y' (x) si y(x) está definida implícitamente por :$x^2 y + y^2 x - 2x = 0$

<u>Primer procedimiento</u>: Usando diferenciales

$$d(x^2 y) + d(y^2 x) - d(2x) = 0 \Rightarrow 2xy\, dy + x^2 dy + 2yx\, dy + y^2 dx - 2x = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 2yx)\, dy = (-2xy - y^2 + 2)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2 - 2xy - y^2}{x^2 + 2yx}$$

<u>Segundo procedimiento:</u> Derivando como función compuesta

$$2.x.y + x^2 y' + 2y.y'x + y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y'(x^2 + 2y.x) = -2xy - y^2 + 2 \Rightarrow y' = \frac{2 - 2xy - y^2}{x^2 + 2yx}$$

El problema que nos plantearemos ahora es:

Dada la ecuación $F(\vec{X}) = 0$ con $\vec{X} \in \mathbf{R^n}$ con $n \geq 2$

a) ¿En qué condiciones esta expresión de n variables define en un cierto conjunto, en forma implícita, a una de las variables en función de las (n-1) restantes?
b) ¿Cómo calcular las derivadas de las función definida implícitamente sin necesidad de obtenerla, es decir a partir de las derivadas de F?

- ***Teorema de Cauchy- Dini para la existencia, continuidad y derivabilidad de la función definida implícitamente por una ecuación.***

Consideremos $F(\vec{X}) = 0$ con $\vec{X} \in \mathbf{R^n}$ con $n \geq 2$, siendo $\vec{X} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$
Si se cumple que:
a) $\exists\ \vec{X}_0 = (x_1^0; x_2^0; \cdots; x_n^0) \in \mathbf{R^n}$ / $F(\vec{X}_0) = 0$
b) F es continua en un entorno de $\vec{X}_0$
c) $\exists$ y son continuas en un $E(\vec{X}_0)$, las $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$ con $i \in \{1,2,\ldots, n\}$
d) $\left.\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right]_{\vec{X}_0} \neq 0$

Entonces:

i) Existe un entorno $U(\vec{X}_0\,') \subseteq \mathbf{R^{n-1}}$ con $\vec{X}_0\,' = (x_1^0; x_2^0; ...; x_{n-1}^0) \in \mathbf{R^{n-1}}$; existe un entorno $V(x_n^0) \subseteq \mathbf{R}$ y existe una única función $\varphi : U(\vec{X}_0\,') \to V(x_n)$ tal que:

$\varphi(\vec{X}_0\,') = x_n^0$ y $F(x_1^0; x_2^0; ...; x_{n-1}^0; \varphi(\vec{X}_0\,'))=0$, $\forall(x_1;x_2;....;x_{n-1}) \in U(\vec{X}_0\,')$

ii) φ es continua y tiene derivadas parciales en $\vec{X}_0\,'$, siendo $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right]_{\vec{X}_0\,'} = \left.\dfrac{\partial x_n}{\partial x_i}\right]_{\vec{X}_0\,'} = -\dfrac{F'_{x_i}(\vec{X}_0)}{F'_{x_n}(\vec{X}_0)}$

Supondremos válida la existencia y la continuidad y sólo demostraremos la derivabilidad

Si F es continua con derivadas parciales continuas en un entorno de $\vec{X}_0$, F es diferenciable, entonces:

$$F(\vec{X}) - F(\vec{X}_0) = dF(\vec{X}_0) + \varepsilon(\vec{X}-\vec{X}_0).\|\vec{X}-\vec{X}_0\| \text{ con } \lim_{\vec{X}\to\vec{X}_0} \varepsilon(\vec{X}-\vec{X}_0)=0$$

Como $F(\vec{X}) = 0$, el primer miembro es 0 .

Resulta:

$$F'_{x_1}(\vec{X}_0).\Delta x_1 + F'_{x_2}(\vec{X}_0).\Delta x_2 + \cdots + F'_{x_n}(\vec{X}_0).\Delta x_n + \varepsilon(\vec{X}-\vec{X}_0).\|\vec{X}-\vec{X}_0\|=0$$

Pero, por hipótesis: $F'_{x_n}(\vec{X}_0) \neq 0$, por lo tanto podemos despejar Δx_n

$$\Delta x_n = -\frac{F'_{x_1}(\vec{X}_0).\Delta x_1 + F'_{x_2}(\vec{X}_0).\Delta x_2 + \cdots + F'_{x_{n-1}}(\vec{X}_0).\Delta x_{n-1}}{F'_{x_n}(\vec{X}_0)} - \frac{\varepsilon(\vec{X}-\vec{X}_0)}{F'_{x_n}(\vec{X}_0)}\|\vec{X}-\vec{X}_0\|$$

Al tomar límite para $\vec{X} \to \vec{X}_0$, el segundo término del segundo miembro tiende a cero. Como el primer término es una transformación lineal $T(\Delta\vec{X}')$ siendo $\vec{X}' = (x_1;.....;x_{n-1})$ resulta x_n diferenciable .Por lo tanto tiene derivadas parciales, que son los coeficientes de la transformación lineal.

Entonces : $$\left.\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\right]_{\vec{X}_0} = -\frac{F_i(\vec{X}_0)}{F_n(\vec{X}_0)}$$

<u>IMPORTANTE</u> : Si se calcula la derivada segunda de una función definida implícitamente , no hay que olvidar que x_n sigue siendo función de x_i y debe derivarse la derivada primera como función compuesta.

- ***Plano tangente y recta normal para la superficie z = φ (x;y) definida implícitamente por***

F(x;y;z) = k (F(x;y;z) - k =0)

Sea $F : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ con $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R^3}$ y $\vec{P}_0=(x_0;y_0;z_0) \in \mathbf{A}$ /

$F(\vec{P}_0)= k$,

F es continua con derivadas parciales continuas en un $E(\vec{P}_0)$

$F'_z(\vec{P}_0) \neq 0$

Entonces F(x;y;z) = k define z = φ (x;y) , para todo (x;y) perteneciente a un entorno de $(x_0;y_0)$

Es decir: $F(x;y;z) = k$ es una superficie de nivel de $F(x;y;z)$ a la que pertenece $(x_0;y_0;z_0)$

Consideremos una curva C sobre la superficie de nivel , que pase por $(x_0;y_0;z_0)$.
C está asociada al conjunto imagen de un función vectorial $\vec{g}:[a,b] \to \mathbf{R}^3$/ $\vec{g}(t) = (g_1(t); g_2(t); g_3(t))$ derivable en un punto t_0 / $\vec{g}(t_0) = (x_0; y_0; z_0)$.

Como C está sobre la superficie definida en un entorno de $(x_0;y_0;z_0)$ por $F(x;y;z)= k$, resulta

$$(F_o\,\vec{g})(t_0) = k \Rightarrow (F_o\,\vec{g})'(t_0) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}F(x_0;y_0;z_0)\cdot\vec{g}'(t_0) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}F(x_0;y_0;z_0) \perp \vec{g}'(t_0)$$

Es decir , el gradiente de un campo escalar de tres variables en un punto $\vec{P}_0$ es perpendicular a cualquier curva a la que pertenezca $\vec{P}_0$, que esté sobre la superficie de nivel que pasa por dicho punto . Por lo tanto, $\vec{\nabla}F(\vec{P}_0)$ es perpendicular a la superficie de nivel de F que pasa por $\vec{P}_0$.

Entonces, la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel de F que pasa por $\vec{P}_0$ es :

$$\vec{\nabla}F(\vec{P}_0).(\vec{P} - \vec{P}_0) = 0 \Rightarrow \boxed{F'_x(\vec{P}_0).(x - x_0) + F'_y(\vec{P}_0).(y - y_0) + F'_z(\vec{P}_0).(z - z_0) = 0}$$

y la recta normal tiene por ecuación : $\boxed{\dfrac{x - x_0}{F_x'(\vec{P}_0)} = \dfrac{y - y_0}{F_y'(\vec{P}_0)} = \dfrac{z - z_0}{F_z'(\vec{P}_0)}}$

(si las tres derivadas son distintas de cero)

Se llega a la misma ecuación del plano tangente si se parte de la ecuación del mismo para funciones definidas explícitamente.
En efecto:si $z = F(x;y)$ está definida implícitamente por $G(x;y;z) = 0$, y $Po(x_0;y_0;z_0)$,se tiene

$$F'_x(x_0;y_0) = -\frac{G'_x(x_0;y_0;z_0)}{G'_z(x_0;y_0;z_0)} \quad \text{y} \quad F'_y(x_0;y_0) = -\frac{G'_y(x_0;y_0;z_0)}{G'_z(x_0;y_0;z_0)}$$

Reemplazando en la ecuación del plano tangente para $z=F(x;y)$:

$$F'_x(x_0;y_0).(x - x_0) + F'_y(x_0;y_0).(y - y_0) - (z - F(x_0;y_0)) = 0$$

resulta: $-\dfrac{G'_x(x_0;y_0;z_0)}{G'_z(x_0;y_0;z_0)}(x - x_0) - \dfrac{G'_y(x_0;y_0;z_0)}{G'_z(x_0;y_0;z_0)}(y - y_0) - (z - z_0) = 0$

$$\boxed{G'_x(x_0;y_0;z_0)(x - x_0) + G'_y(x_0;y_0;z_0)(y - y_0) + G'_z(x_0;y_0;z_0).(z - z_0) = 0}$$

Ec. del plano tangente a una superficie definida implícitamente

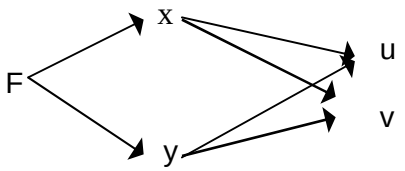
En consecuencia, las ecuaciones de la recta normal son:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{G'_x(x_0;y_0;z_0)}=\frac{y-y_0}{G'_y(x_0;y_0;z_0)}=\frac{z-z_0}{G'_z(x_0;y_0;z_0)}}$$

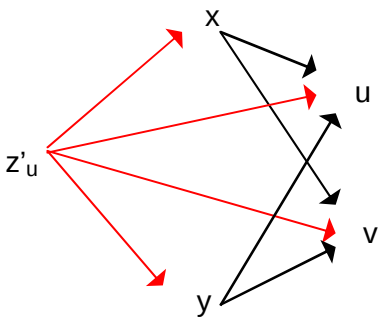
Ecs. de la recta normal a una superficie definida implícitamente, si las tres derivadas son distintas de 0

Derivada segunda de funciones compuestas

Supongamos que z = F(x;y) con x = x(u;v) Nos interesa obtener z''_{uv}
y = y(u;v)



Resulta que : $z'_u = F'_x(x;y)\, x'_u(u;v) + F'_y(x;y)\, y'_u(u;v)$
Entonces z'_u depende de: x, y, u, v.



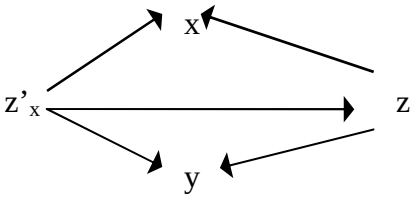
$$\boxed{z''_{uv}=\frac{\partial z'_u}{\partial x}.x'_v+\frac{\partial z'_u}{\partial y}y'_v+\left.\frac{\partial z'_u}{\partial v}\right|_{x,y,uc,ctes}}$$

Derivada segunda de funciones definidas implícitamente

Supongamos que z = F(x;y) está definida implícitamente por G(x;y;z) = 0, entonces

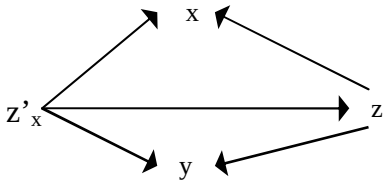
$$z'_x=-\frac{G'_x}{G'_z} \qquad y \qquad z'_y=-\frac{G'_y}{G'_z}$$

Pero tanto z'_x como z'_y dependen de x, y , z. Si se plantea calcular z''_{xy}, se necesita conocer primero z'_x



$$z''_{xy} = \frac{\partial z'_x}{\partial z}.z'_y + \left.\frac{\partial z'_x}{\partial y}\right|_{x,z,ctes} \text{, con } z'_y = -\frac{G'_y}{G'_z}$$

Para obtener z''_{xx} deberán tenerse en cuenta las mismas relaciones entre las variables



$$z''_{xx} = \frac{\partial z'_x}{\partial z}.z'_x + \left.\frac{\partial z'_x}{\partial x}\right|_{y,z,ctes} \text{, con } z'_x = -\frac{G'_x}{G'_z}$$

Con el mismo criterio puede obtenerse z''_{yy} .

<u>Diferenciales sucesivos</u>

Si F: $\mathbf{A \rightarrow R}$ con $\mathbf{A \subseteq R^2}$ tiene derivadas parciales continuas hasta el orden n, considerando h y k constantes, puede obtenerse el diferencial segundo de F.

$d\,F(x;y) = F'_x(x;y).\,h + F'_y(x;y).\,k$

$$d^2\,F(x;y) = d[\,dF(x;y)\,] = \frac{\partial[F'_x.h + F'_y.k]}{\partial x}h + \frac{\partial[F'_x.h + F'_y.k]}{\partial y}.k =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x^2}h + \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial y \partial x}k\right).h + \left(\frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \partial y}.h + \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial y^2}.k\right).k =$$

$$= \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x^2}.h^2 + 2\frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \partial y}h.k + \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial y^2}k^2$$ (ya que al pedir derivadas continuas se cumplen las hipótesis del Teorema de Schwarz).

Puede observarse que el segundo miembro tiene la forma del cuadrado de un binomio, entonces se define un **operador.**

$$d^2\,F(x;y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}.h + \frac{\partial}{\partial y}.k\right)^{(2)} F(x;y) = \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x^2}.h^2 + 2\frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \partial y}h.k + \frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial y^2}k^2$$

Si se calcula $d[d^2\,F(x;y)] = d^3\,F(x;y)$, se obtiene:

$$d^3 F(x;y) = \frac{\partial^3 F(x;y)}{\partial \ x^3}.h^3 + 3\frac{\partial^3 F(x;y)}{\partial x^2 \partial y}h^2.k + 3\frac{\partial^3 F(x;y)}{\partial x \partial y^2}hk^2 + \frac{\partial^3 F(x;y)}{\partial y^3}.k^3$$

Utilizando un operador similar al anterior , decimos que:

$$d^3 F(x;y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}.h + \frac{\partial}{\partial y}.k\right)^{(3)} F(x;y)$$

En general:

$$\boxed{d^n F(x;y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}.h + \frac{\partial}{\partial y}.k\right)^{(n)} F(x;y) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n F(x;y)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}.h^{n-i}.k^i}_{(1)}}$$

(1) Recordar que: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a^{n-i}\ b^i$

FÓRMULA DE TAYLOR

- ***Para funciones escalares***

En Análisis I, se demostró que si una función y = f(x) es derivable hasta el orden (n+1), en un entorno de un punto a, dicha función se puede aproximar, en ese entorno, mediante un polinomio de grado n, escrito en potencias de (x -a) y se puede acotar el error que se comete cuando se toma como valor de f(x) con $x \in E(a; \delta)$, el valor que toma ese polinomio para la **"x"** considerada

En síntesis, en Análisis I se probó que si f(x) es derivable hasta el orden (n+1), en un entorno de un punto **a**, se cumple que:

$$f(x) = f(a) + f'(a).(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(x - a)^{(n)} + T_{n+1}$$

T_{n+1} es el *Término complementario o resto de Taylor*.

También se lo indica con R_n o Tc, y permite acotar el error que se comete cuando se toma como valor de la función , el del polinomio.

Existen distintas expresiones para el Término complementario. Una de las más usuales es la de Lagrange:

$$T_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c).(x - a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

donde c está entre x y a, es decir x < c < a o bien a < c < x

x c a a c x

Resulta:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{i}(a)}{i!}.(x - a)^{i} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.(x - a)^{n+1} \quad \text{, con c entre x y a}$$

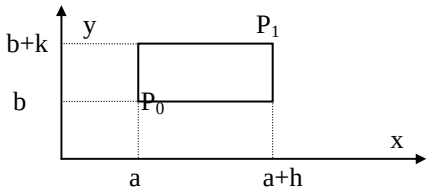
(Observación: Se considera que la derivada de orden 0 es la función)

Si a = 0, la fórmula de Taylor se conoce como fórmula de Mac Laurin

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}.x^{i} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{(n+1)} \quad \text{, con c entre 0 y x}$$

- ***Para campos escalares de dos variables:***

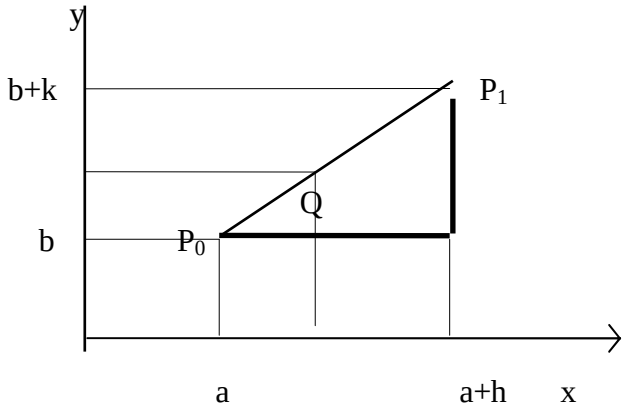
Consideremos un campo escalar $F:A \rightarrow \mathbf{R}$, con $A \subseteq \mathbf{R}^2$, diferenciable hasta el orden (n+1) en un entorno de (a;b) que incluya al rectángulo de vértice opuestos P_o (a;b) y P_1(a+h;b+k).



Interesa encontrar un polinomio de grado n, en potencias de (x-a) e (y -b) , que permita calcular valores aproximados de la función en un entorno de (a;b), por ejemplo en el punto (a+h;b+k).

Llevaremos el problema a una función de una variable. Para ello escribimos en forma paramétrica la ecuación de la recta P_oP_1

:



Si $Q \in P_0 P_1$, y Q (x;y) se tiene: $\dfrac{|\overline{P_0Q}|}{|P_0P_1|} = \dfrac{x-a}{h} = \dfrac{y-b}{k} = t$; de donde: $x = a + t\,h$

$y = b + t\,k$

Con t = 0 , se obtiene x = a , y = b que son las coordenadas de P_o; con t = 1, se obtienen las de P_1 , y para cualquier otro punto del segmento P_oP_1 debe ser: $0 < t < 1$.

Con esta parametrización, F(x;y) puede escribirse como función de "t":

$$F(x;y) = F(a + th;b + tk) = \varphi(t).$$

Desarrollaremos por Mac Laurin esta función de una variable:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0).t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}.t^{(n)} + T_{n+1} \qquad (1)$$

con:

$$T_{n+1} = \frac{\varphi^{(n+1)}(c).t^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ con c entre 0 y t.}$$

Ya sabemos que $\varphi(0) = F(a;b)$

Trataremos de expresar las derivadas de $\varphi(t)$ para t=0 , en función de las derivadas de F. Para ello, derivamos F como función compuesta.

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr] & \\ F \arrow[ur] \arrow[dr] & & t \\ & y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\varphi'(t)= F'_x\,(a+th;\, b+tk).x'(t) + F'_y\,(a+th;\, b+tk).\, y'(t)$

Como $x'(t)= h$ e $y'(t) = k$, resulta:

$$\varphi'(t)= F'_x(a+th;\, b+tk).h + F'_y(a+th;\, b+tk).\, k$$

Para t = 0 se tiene:

$$\varphi'(0)= F'_x(a;\, b).h + F'_y\,(a;\, b).\, k = d\,F(a;b).$$

Razonando de la misma forma obtenemos: $\varphi''(t)=\dfrac{d\varphi'_t}{dt}$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr] & \\ \varphi'_t \arrow[ur] \arrow[dr] & & t \\ & y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\varphi''_t = \frac{\partial\,(F'_x\,h + F'_y\,k)}{\partial\,x}h + \frac{\partial\,(F'_x\,h + F'_y\,k)}{\partial\,y}.k$$

Luego:

$\varphi''(t)= [\,F''_{xx}\,(a+t\,h;\, b+t\,k).h + F''_{yx}\,(a+th;\, b+tk).k].h + [F''_{xy}\,(a+th;\, b+tk).h + F''_{yy}\,(a+th;\, b+tk).k].k$

Por ser F diferenciable hasta el orden (n+1), se cumplen las hipótesis del Teorema de Schwarz, entonces para t = 0 , resulta

$\varphi''(0)=F''_{xx}\,(a;b).h^2 + 2\,F''_{xy}\,(a;b).h.k + F''_{yy}\,(a;b).k^2=d^2\,F(a;b)$

Así sucesivamente, puede verse que: $\varphi^{(n)}(0)= d^{(n)}\,F(a;b)$.

Reemplazando en (1)

$$\varphi(t) = F(a;b) + dF(a;b).t + \frac{d^2F(a;b)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{d^{(n)}F(a;b)}{n!}.t^{(n)} + T_n$$

con: $T_{n+1} = \dfrac{\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}t^{n+1} = \dfrac{d^{(n+1)}F(a+ch;b+ck)}{(n+1)!}$; con c entre 0 y t

Como interesa F(a +h;b+ k) que es $\varphi(1)$, hacemos t = 1:

$$F(a+h;b+k) = F(a;b) + dF(a;b) + \frac{d^2F(a;b)}{2!} + \ldots + \frac{d^{(n)}F(a;b)}{n!} + T_{n+1}$$

con : $T_n = \dfrac{d^{(n+1)}F(a;b)}{(n+1)!}$, con c / $0 < c < 1$.

La Fórmula de Taylor para campos escalares de dos variables puede escribirse:

$$F(a+h;b+k) - F(a;b) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^{(i)}F(a;b)}{i!} + \frac{d^{(n+1)}F(a+ch;b+ck)}{(n+1)!}, \text{ con } 0 < c < 1$$

Si hacemos x= a + h ; y = b + k , resulta: h = x - a ; k = y - b; al desarrollar los diferenciales, la Fórmula de Taylor permite escribir F(x;y) en potencias de (x-a) e (y- b)

$$\boxed{\begin{aligned} &F(x;y) = F(a;b) + [F_x'(a;b).(x-a) + F_y'(a;b).(y-b)] + \\ &\frac{1}{2!}\left[F''_{xx}(a;b).(x-a)^2 + 2F''_{xy}(a;b).(x-a).(y-b) + F''_{yy}(a;b).(y-b)^2\right] + \ldots + T_{n+1} \end{aligned}}$$

Si (a;b) =(0;0), se obtiene la Fórmula de Mac Laurin, en la que h= x - 0 = x; k = y -b = y

$$\boxed{F(x;y) - F(0;0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^{(i)}F(0;0)}{i!} + \frac{d^{(n+1)}F(cx;cy)}{(n+1)!}, \text{ con } 0 < c < 1}$$

<u>Recordar</u>:

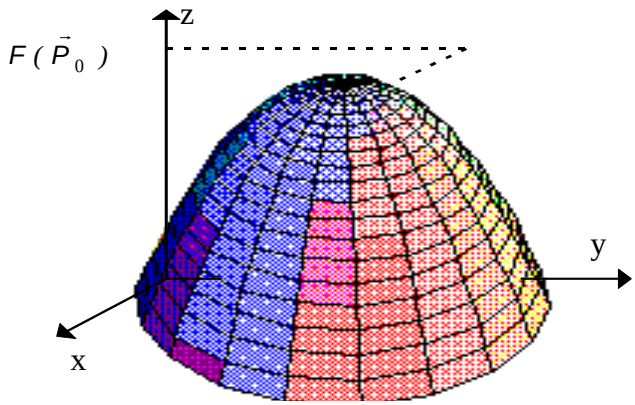
$$d^{(n)}F(a;b) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)} F(a;b) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-i}\partial y^i}\Bigg]_{(a;b)} (dx)^{n-i}(dy)^i$$

Extremos de un campo escalar

Consideremos F: A→**R**, con A $\subseteq$ $\mathbf{R}^2$, siendo A abierto y $\vec{P}_0$ $(x_0 ;y_0) \in$ A

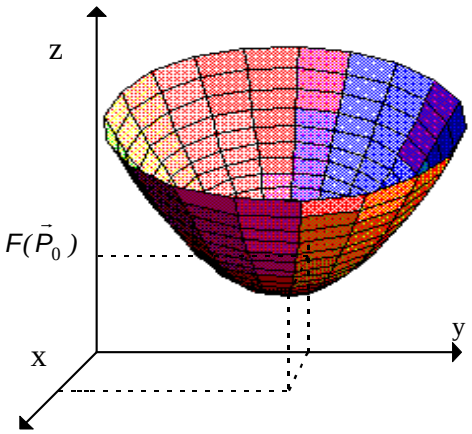
- *Definición :*

F($\vec{P}_0$) es un ***máximo relativo o local*** de F$\Leftrightarrow \exists\ \delta > 0 / \forall\ \vec{X} \in E[\vec{P}_0,\delta] : F(\vec{X}) \leq F(\vec{P}_0)$

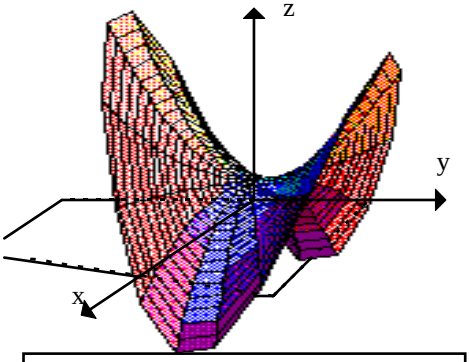


- *Definición :*

F($\vec{P}_0$) es un ***mínimo relativo o local*** de F$\Leftrightarrow \exists\ \delta > 0 / \forall \vec{X} \in E[\vec{P}_0,\delta] : F(\vec{X}) \geq F(\vec{P}_0)$



- *Definición :*



El pl. tg atraviesa la superficie

(x_0 ;y_0 ; F(x_0 ;y_0)) es un punto de ensilladura de F en A $\Leftrightarrow$ F es diferenciable en $\vec{P}_0$ y el plano tangente atraviesa la superficie representativa de F.

Es decir:

(x_0 ;y_0 ; F(x_0 ;y_0)) es un ***punto de ensilladura*** de F en A $\Leftrightarrow$ F es diferenciable en $\vec{P}_0 \wedge$

$\forall\ \delta > 0 : [\ \exists\ \vec{X} \in E[\vec{P}_0,\delta] / F(\vec{X}) \geq F(\vec{P}_0)\ \wedge$

$\exists\ \vec{X}' \in E[\vec{P}_0,\delta] / F(\vec{X}') \leq F(\vec{P}_0)]$

Si llamamos $\Delta F = F(\vec{X}) - F(\vec{P}_0)$, con $\vec{X}$ perteneciente a un entorno de $\vec{P}_0$ resulta:

$\Delta F \leq 0 \Rightarrow F(\vec{P}_0)$ ***máximo relativo*** (MR)

son ***extremos relativos o locales***

$\Delta F \geq 0 \Rightarrow F(\vec{P}_0)$ ***mínimo relativo*** (mr)

Si F es diferenciable en $\vec{P}_0$ y ΔF cambia de signo en cualquier entorno de $\vec{P}_0$, entonces $(x_0 ; y_0 ; F(x_0 ; y_0))$ es un ***punto de ensilladura***

- ***Condición necesaria para la existencia de extremos:***

Consideremos F: A→**R**, con $A \subseteq \mathbf{R}^2$ / z = F(x;y) , siendo A abierto , $\vec{P}_0\ (x_0 ; y_0) \in A$ un punto en el que existen las derivadas parciales de F .

Si $F(\vec{P}_0)$ es un extremo local de F, entonces :$F'_x(\vec{P}_0) = F'_y(\vec{P}_0) = 0$

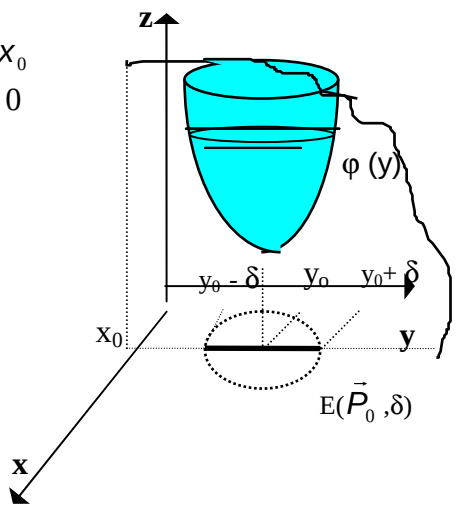
Supongamos que $F(\vec{P}_0)$ es un mínimo local, es decir, por definición :
$\exists\, \delta > 0 / \forall \vec{X} \in E[\vec{P}_0, \delta] : F(\vec{X}) \leq F(\vec{P}_0)$

Cortemos la superficie representativa de F con el plano $x = x_0$. La intersección es una curva sobre ese plano cuya ecuación es de la forma $\begin{cases} z = \varphi(y) \\ x = x_0 \end{cases}$

El intervalo $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, sobre la recta $\begin{cases} x = x_0 \\ z = 0 \end{cases}$

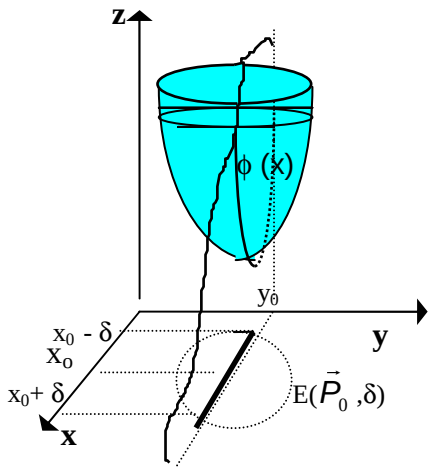
está incluido en $E[\vec{P}_0, \delta]$, luego :

$F(x_0 ; y) \geq F(x ; y), \forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$
Es decir:
$\varphi(y) \geq \varphi(y_0), \forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$



Por lo tanto $\varphi(y_0)$ es un mínimo relativo de $\varphi(y)$ y debe cumplirse la condición necesaria para la existencia de extremos en funciones escalares: $\varphi'(y_0) = F'_y(\vec{P}_0) = 0$.

De la misma forma, si se corta la superficie con el plano $y = y_0$, se obtiene una curva de ecuación $\begin{cases} z = \phi(x) \\ y = y_0 \end{cases}$ que presenta un mínimo relativo en $\phi(x_0)$ y por lo tanto:
$\phi'(x_0) = F'_x(\vec{P}_0) = 0$



¡ Cuidado!

Las derivadas parciales pueden anularse y no presentarse en ese punto ningún extremo .
(Ej $z = x^2 - y^2$. En (0;0) no hay extremo, el plano tangente , (que existe pues la función es diferenciable) atraviesa la superficie, $\Delta F > 0$ para algunos puntos de un entorno de (0;0) y $\Delta F > 0$, en otros; se trata de un punto de **ensilladura**) .

Los puntos que cumplen la condición necesaria se llaman **críticos o estacionarios.**

- ***<u>Condición suficiente para la existencia de extremos relativos</u>***

Hessiano

Sea F un campo escalar de dos variables con derivadas parciales continuas hasta el segundo orden, llamamos hessiano de F en $\vec{P}_0$ al determinante:

$$H(\vec{P}_0) = \begin{vmatrix} F''_{xx}(\vec{P}_0) & F'_{xy}(\vec{P}_0) \\ F''_{xy}(\vec{P}_0) & F'_{yy}(\vec{P}_0) \end{vmatrix} = F'_{xx}(\vec{P}_0).F''_{yy}(\vec{P}_0) - F''^2_{xy}(\vec{P}_0)$$

Teorema

Consideremos F: A$\rightarrow$**R**, con A $\subseteq$ $\mathbf{R}^2$ abierto, y un punto $\vec{P}_0 \in$ A . Si se verifica que:

i)F tiene derivadas parciales hasta el segundo orden continuas en un entorno de $\vec{P}_0$
ii) $F'_x(\vec{P}_0) = F'_y(\vec{P}_0) = 0$
iii) las derivadas segundas de F en $\vec{P}_0$ no son simultáneamente nulas. (Suponemos $F''_{xx}(\vec{P}_0) \neq 0$)

Entonces:

Si $H(\vec{P}_0) > 0$, entonces $F(\vec{P}_0)$ es un extremo relativo y : $\begin{cases} F''_{xx}(\vec{P}_0) < 0 & \Rightarrow F(a;b) \text{ MR} \\ F''_{xx}(\vec{P}_0) > 0 & \Rightarrow F(a;b) \text{ mr.} \end{cases}$

Si $H(\vec{P}_0) < 0$, entonces $(x_0 ; y_0 ; F(x_0 ; y_0))$ es un punto de ensilladura.

Si $H(\vec{P}_0) = 0$, no puede obtenerse por este método ninguna conclusión.

Demostración:

Como una función continua conserva su signo en un entorno del punto en que se verifica la continuidad, y supusimos que todas las derivadas segundas de F son continuas en $\vec{P}_0$ y por lo tanto es continuo H e n $\vec{P}_0$ trabajaremos en un entorno de $\vec{P}_0$ en el que H y F''_{xx} conserven su signo.

Desarrollamos por Taylor F(x;y) en ese entorno de $\vec{P}_0$ con T_{n+1} de segundo orden.

$F(x;y) = F(\vec{P}_0) + dF(\vec{P}_0) + T_{n+1}$

$$F(x;y) - F(\vec{P}_0) = F'_x(\vec{P}_0) \cdot h + F'_y(\vec{P}_0) \cdot k + \tfrac{1}{2} d^{(2)}F(x_0 + ch;\, y_0 + ck) \quad \text{con } 0 < c < 1$$

ΔF

Como las derivadas primeras en $\vec{P}_0$ se anulan por hipótesis, se tiene:

$$\Delta F = \tfrac{1}{2}\,[F''_{xx}(x_0 + ch;\, y_0+ck) \cdot h^2 + 2 \cdot F''_{xy}(x_0 + ch;\, y_0+ck) \cdot h\,k + F''_{yy}(x_0 + ch;\, y_0+ck)] \quad \text{con } 0 < c < 1$$

Para simplificar la notación no indicaremos el punto en el que se considera cada derivada segunda, entendiendo que dicho punto es $(x_0+ch;y_0+ck)$ con $0 < c < 1$

Luego: $\Delta F. = \tfrac{1}{2}\,[F''_{xx} \cdot h^2 + 2 \cdot F''_{xy}\, h\,k + F''_{yy}\, k^2]$

o bien : $2 \cdot \Delta F. = F''_{xx} \cdot h^2 + 2 \cdot F''_{xy}\, h\,k + F''_{yy}\, k^2$

Como se supuso $F''_{xx} \neq 0$, sacamos F''_{xx} como factor común entre los dos primeros términos:

$$2 \cdot \Delta F. = F''_{xx} \cdot \left[h^2 + 2 \cdot \frac{F''_{xy}}{F''_{xx}}\, h\,k \right] + F''_{yy}\, k^2$$

Completamos cuadrados sumando y restando, dentro del corchete $+ \left(\dfrac{F''_{xy}}{F''_{xx}}\right)^2 k^2$

$$2 \cdot \Delta F. = F''_{xx} \cdot \left[h^2 + 2\,h\,k\,\frac{F''_{xy}}{F''_{xx}} + k^2 + \left(\frac{F''_{xy}}{F''_{xx}}\right)^2 k^2 - \left(\frac{F''_{xy}}{F''_{xx}}\right)^2 \cdot k^2 \right] + F''_{yy}\, k^2$$

$$2 \cdot \Delta F. = F''_{xx} \cdot \left[\left(h + \frac{F''_{xy}}{F''_{xx}}\, k \right)^2 - \left(\frac{F''_{xy}}{F''_{xx}}\right)^2 \cdot k^2 \right] + F''_{yy}\, k^2$$

Aplicando prop. distributiva se tiene:

$$2 \cdot \Delta F. = F''_{xx} \cdot \left(h + \frac{F''_{xy}}{F''_{xx}}\, k \right)^2 - \frac{\left(F''_{xy}\right)^2}{F''_{xx}} \cdot k^2 + F''_{yy}\, k^2$$

Sacando común denominador entre el segundo y el tercer término y ordenando, resulta:

$$2 \cdot \Delta F. = F''_{xx} \cdot \left(h + \frac{F''_{xy}}{F''_{xx}}\, k \right)^2 + \frac{F''_{xx}\,F''_{yy} - F''^2_{xy}}{F''_{xx}}\, k^2$$

pero $F''_{xx}\,F''_{yy} - F''^2_{xy} = \underbrace{H(a+ch;b+ck)}_{H}$ con $0 < c < 1$

Luego:

$$2 \cdot \Delta F. = F''_{xx} \cdot \left(h + \frac{F''_{xy}}{F''_{xx}}\, k \right)^2 + \frac{H}{F''_{xx}}\, k^2$$

Como se trabaja en un entorno de $\vec{P}_0$ en el que H conserva el signo de H($\vec{P}_0$) y F”$_{xx}$ ($\vec{P}_0$) se tiene que analizar los siguientes casos:

1.- H($\vec{P}_0$) > 0

Signo de Δ F. = Signo F”$_{xx}$ ($\vec{P}_0$), pues $\left(h+\frac{F''_{xy}}{F''_{xx}}k\right)^2 \geq 0$ y $k^2 \geq 0$ pero las bases de los dos cuadrados no pueden ser nulas al mismo tiempo ya que esto significaría que no nos hemos movido de $\vec{P}_0$.

1.1.- Si F”$_{xx}$ ($\vec{P}_0$) > 0 ⇒ Δ F > 0 ⇒ F($\vec{P}_0$) mínimo relativo

1.2.- Si F”$_{xx}$ ($\vec{P}_0$) < 0 ⇒ Δ F < 0 ⇒ F($\vec{P}_0$) máximo relativo

2.- H($\vec{P}_0$) < 0

2.1.- Si *k = 0*, entonces *2* ΔF = F”$_{xx}$. h^2 ⇒ signo de Δ F. = signo F”$_{xx}$ ($\vec{P}_0$)

2.2.- Si $h + \frac{F''_{xy}}{F''_{xx}}k = 0$, entonces $2\Delta F = \frac{H}{F''_{xx}}k^2$ ⇒ signo de Δ F.≠ signo F”$_{xx}$ ($\vec{P}_0$)

Por lo tanto *ΔF* cambia de signo en un entorno de $\vec{P}_0$ luego (x_0 ;y_0 ;F(x_0;y_0)) es un punto de ensilladura.

3.- H=0 , se puede ver con ejemplos que pueden presentarse distintas situaciones

- ***<u>Extremos locales para campos escalares de tres variables</u>***

Sea F: $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ con derivadas parciales continuas en un entorno de $\vec{P}_0$ siendo $\vec{P}_0 \in$ A.

- ***Condición necesaria para la existencia de extremos relativos.***

Si $F(\vec{P}_0)$ es un extremo relativo o local de F entonces $\vec{\nabla} F(\vec{P}_o) = \vec{0}$

- ***Condición suficiente***

Se definen los siguientes hessianos:

$$H_1 = F''_{xx} \ , \ H_2 = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix} \quad y H_3 = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F''_{yz} \\ F''_{zx} & F''_{zy} & F''_{zz} \end{vmatrix}$$

Si $\vec{P}_0$ es un punto que cumple la condición necesaria para la existencia de extremos relativos y las derivadas segundas de F no son simultáneamente nulas en $\vec{P}_0$, entonces si :

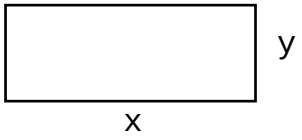
a) $H_1(\vec{P}_0) > 0 \wedge H_2(\vec{P}_0) > 0 \wedge H_3(\vec{P}_0) > 0 \Rightarrow F(\vec{P}_0)$ es mínimo relativo

b) $H_1(\vec{P}_0) < 0 \wedge H_2(\vec{P}_0) > 0 \wedge H_3(\vec{P}_0) < 0 \Rightarrow F(\vec{P}_0)$ es máximo relativo

- ***<u>Método de los multiplicadores de Lagrange</u>***

Extremos ligados o condicionados. Introducción.

Supongamos que se quieren determinar las dimensiones del rectángulo de perímetro 24 que tiene área máxima.

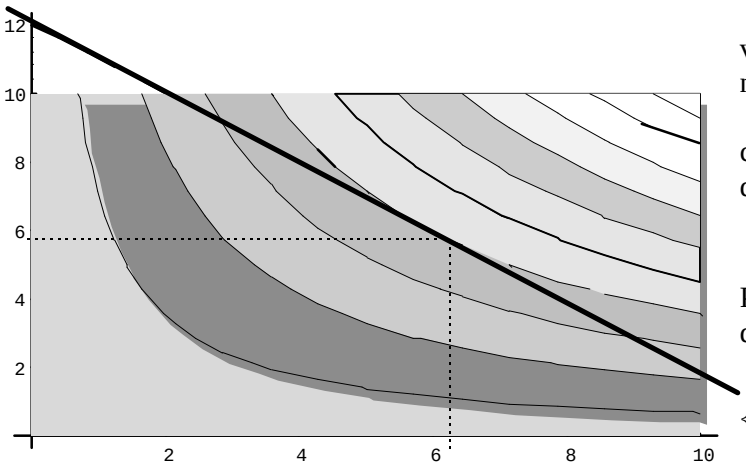


Esto significa que se desea maximizar la función A(x;y) = x.y entre aquelos pares (x;y) que cumplen con la condición : x + y = 12.

Si φ(x;y) = x + y - 12 , se busca maximizar la función A entre aquellos pares (x;y) que cumplen con: φ(x;y)=0. La condición φ(x;y)=0 se llama restricción del problema.

Llamamos *C* al conjunto de nivel de φ, caracterizado por φ(x;y)=0, para indicar que se estudia A restringida a aquéllos valores de (x;y) que pertenezcan a C, escribimos A|*C* (se lee : "A restringida a *C*".)

Al fijar un valor de A, estamos determinando una curva de nivel de A(x;y). Trabajar con A|*C* , significa trabajar con las intersecciones entre las curvas de nivel de A y *C* . Entre esos valores, el extremo de A|*C* se producirá cuando la curva de nivel de A sea tangente a *C*.



En el punto de tangencia, los vectores normales a ambas curvas de nivel son paralelos.

Como el vector normal a una curva de nivel está dado por su gradiente, debe ser:

$$\vec{\nabla}A = \lambda\vec{\nabla}\varphi$$

Para encontrar el punto en cuestión, deben buscarse los puntos que cumplan:

$$\begin{cases} A'_x(x;y) = \lambda\varphi'_x(x;y) \\ A'_y(x;y) = \lambda\varphi'_y(x;y) \\ \varphi(x;y) = 0 \end{cases}$$

En este caso, resulta:

$$\begin{cases} y = \lambda \\ x = \lambda \\ x + y = 12 \end{cases} \Rightarrow x = y \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow A = 36$$

El rectángulo de perímetro 24 y área máxima es el cuadrado de lado 6

- ***Método de los multiplicadores de Lagrange***.

Sean F(x;y) y φ (x;y) dos campos escalares de dos variables con derivadas parciales continuas, tales F(x;y) tiene un extremo relativo $F(x_o;y_o)$ cuando (x;y) está sujeto a la restricción φ(x;y) = 0.
Si $\vec{\nabla}\varphi(x_o;yo) \neq \vec{0}$, entonces existe un número real k_0 tal que: $\vec{\nabla}F(x_0;y_0) = k_0\vec{\nabla}\varphi(x_0;y_0)$

Demostración:
La representación gráfica de φ (x;y) = 0 es una curva *C* en el plano (x,y) que admite una representación vectorial

$$\vec{r}(t) = x(t)\breve{i} + y(t)\breve{j}$$

para t perteneciente a algún intervalo I.

$\vec{r}(t)$ es el vector posición de un punto P de *C*. Consideremos el punto $P_o \in C$ en el que F alcanza su extremo y supongamos que se produce para $t = t_o$.

$$\vec{P}_0 = \left(x(t_0;y(t_0)\right) = \vec{r}(t_0) \Rightarrow F(\vec{P}_0) = F\left(\vec{r}(t_0)\right) = \left(F_o\vec{r}\right)(t_0)$$

Se puede definir una nueva función : $F_C(t) = \left(F_o\vec{r}\right)(t_0) = F\left(x(t);y(t)\right)$ en la que al variar "t" se obtienen valores de F correspondientes a puntos de la curva *C*. Como $F(x_o;yo)$ es un extremo de F bajo esta restricción, resulta $F_C(t_o)$ un extremo de F_C.
Por la condición necesaria para la existencia de extremos, resulta: $F'_C(t_o)= 0$ (*)

Derivando F_C como una función compuesta, resulta:

$$F'_C(t)= \vec{\nabla}F(\vec{P}) \cdot \vec{r}'(t)$$

Para $t = t_o$ es $F'_C(t_o)= \vec{\nabla}F(\vec{P}_0) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$ (por *) $\Rightarrow \vec{\nabla}F(\vec{P}_0) \perp \vec{r}'(t_0)$

Esto prueba que $\vec{\nabla}F(\vec{P}_o)$ es ortogonal al vector $\vec{r}'(t_0)$ que es tangente a *C*. Es decir, $\vec{\nabla}F(\vec{P}_o)$ es perpendicular a la curva de nivel de φ(x;y) que pasa por $(x_o;y_o)$

Además, por propiedad del vector gradiente, $\vec{\nabla}\varphi(\vec{P}_0) \perp C$ por ser la curva de nivel de φ(x;y) que pasa por $(x_o;y_o)$, luego $\vec{\nabla}\varphi(\vec{P}_0) \perp \vec{r}'(t_0)$ .Entonces ambos vectores gradiente son perpendiculares al mismo vector, por lo tanto son paralelos entre sí, es decir:

$$\boxed{\exists\, k_0 \in R/ \quad \vec{\nabla}F(\vec{P}_o) = k_0\vec{\nabla}\varphi(\vec{P}_0) \quad (1)}$$

<u>Consecuencia:</u>
De (1) resulta:
$\vec{\nabla}[F(\vec{P}_0) - k_0\varphi(\vec{P}_0)] = \vec{0}$.

Entonces, si hacemos $\lambda_0 = -k_0$ y definimos la función de Lagrange: L(x;y;λ}=F(x;y)+λφ(x;y), resulta que para los puntos críticos del extremo condicionado existe $\lambda_0 \in R/$ $\vec{\nabla}L(x_0;y_0;\lambda_0) = \vec{0}$ (2)
El número λ es un multiplicador de Lagrange.

Si F sujeta a la restricción φ (x;y) = 0 tiene un extremo en (x_o;yo), entonces (x_o;yo) debe ser solución de (2). por lo tanto para encontrar los extremos se deben encontrar los valores de x e y que para algún valor de λ verifican tales ecuaciones.

El método puede utilizarse cuando F está sujeta a más de una restricción; en este caso la función de Lagrange es: $L(x;y;\lambda_1;\lambda_2) = F(x;y) + \lambda_1\varphi_1(x;y) + \lambda_2\varphi_2(x;y)$

Condición suficiente

Para un campo escalar $F : A \subseteq R^2 \rightarrow R$, sujeto a la condición φ (x;y) = 0.

Sean F(x;y) y φ (x;y), dos campos escalares continuos con derivadas parciales continuas hasta el segundo orden .

Sea $\vec{P}_o$=(x_0 ; y_0) un punto tal que existe λ_0 que verifica: $\vec{\nabla}(F+\lambda\varphi)(x_0;y_0;\lambda_0) = \vec{0}$

La función de Lagrange es L(x;y; λ)= F(x;y) +λ.φ(x;y).

Se analiza el signo del **<u>Hessiano orlado</u>** , es decir del determinante:

$$H_0(x;y;\lambda) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \varphi'_x \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial^2 y} & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y & 0 \end{vmatrix} \quad \text{en } (x_0;\ y_0;\ \lambda_0).$$

Si H(x_0; y_0 ; λ_0). >0 , entonces F (x_0; y_0) es Máximo local de F sujeta a φ.

Si H(x_0; y_0 ; λ_0).< 0 , entonces F (x_0; y_0) es mínimo local de F sujeta a φ.

Si H(x_0; y_0 ; λ_0).=0 , entonces el criterio no sirve.

<u>EJEMPLOS:</u>

1) Obtener los extremos de F(x;y)= x^2 + y , sobre la curva $x^2 + y^2$ =9

Consideramos:
F(x;y) = x^2 + y ; φ (x;y) = $x^2 + y^2$, la condición es φ (x;y) = 9

Debe ser: $\vec{\nabla}F = \lambda\ .\vec{\nabla}\varphi \Rightarrow$ $F'_x = \lambda.\ \varphi'_x$

$F'_y = \lambda.\ \varphi'_y$

Además: φ (x;y) = 9

Resulta: $\begin{cases} 2x = 2\lambda x & (1) \\ 1 = 2\lambda y & (2) \\ x^2 + y^2 = 9 & (3) \end{cases}$

De (1): $x.(1-\lambda) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee \lambda = 1$

a) Si $x = 0$, en (3) : $|y| = 3$

Si $y = 3$, en (2) : $\lambda = 1/6$

Si $y = -3$, en (2): $\lambda = -1/6$

b)Si λ=1, en (2) resulta y = 1/2. En (3) se tiene $|x| = \sqrt{35}/2$

Los puntos críticos obtenidos son: (0;3) con λ = 1/6 ; (0;-3), con λ= -1/6 ;
($\sqrt{35}/2$; 1/2) con $\lambda = 1$ y (- $\sqrt{35}/2$; 1/2) también con $\lambda = 1$

La función de Lagrange es: $L = x^2 + y - \lambda(x^2 + y^2)$

$L'_x = 2x - 2\lambda x$, $L''_{xx} = 2 - 2\lambda$, $L''_{xy} = 0$

$L'_y = 1 - 2\lambda y$, $L''_{yy} = -2\lambda$

Entonces: $H_0 = \begin{vmatrix} 2-2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & -2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = 8\lambda x^2 - 4y^2(2 - 2\lambda)$

H_0 (0;3;1/6) = - 4/9 .5/3 <0 $\Rightarrow$F(0;3) mínimo relativo condicionado de F
H_0 (0;-3;-1/6) = - 4/9 .7/3 <0 $\Rightarrow$F(0;-3) mínimo relativo condicionado de F
H_0 ($\sqrt{35}/2$; 1/2; 1) = 70 - 4. 1/4. 0 > 0 $\Rightarrow$F($\sqrt{35}/2$; 1/2) Máx. rel. condicionado de F

2) Encontrar los puntos de la curva $y^2 = 4x$ que están a la menor distancia posible de (4;0)

Consideremos la función distancia: $d(x;y) = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$.
Optimizaremos $F(x;y) = (x - 4)^2 + y^2$.
La condición es $\varphi(x;y) = 0$, siendo $\varphi(x;y) = y^2 - 4x$
Debe ser: $\vec{\nabla}F = \lambda . \vec{\nabla}\varphi \Rightarrow F'_x = \lambda . \varphi'_x \Rightarrow 2.(x - 4) = -4\lambda$ (1)
$F'_y = \lambda . \varphi'_y \Rightarrow 2y = 2\lambda y$ (2)
Además: $\varphi(x;y) = 0 \Rightarrow y^2 - 4x = 0$ (3)
De (2): $y(1-\lambda)=0 \Rightarrow y = 0 \vee \lambda = 1$
a) Si y = 0 , en (3) resulta x = 0 , y en (1): λ =2
b) Si λ =1, en (1) se tiene: x = 2 y en (3) : $|y| = 2.\sqrt{2}$
Los puntos críticos son: (0;0) con λ =2 , (2 ; $2\sqrt{2}$) con λ =1 y (2;- $2\sqrt{2}$) también con λ =1.

La función de Lagrange es: $L = (x - 4)^2 + y^2 - \lambda(y^2 - 4x)$

$L'_x = 2(x - 4) + 4\lambda \Rightarrow L''_{xx} = 2$; $L''_{xy} = 0$; $L'_y = 2y - 2\lambda y \Rightarrow L''_{yy} = 2 - 2\lambda$

Resulta: $H_o = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2-2\lambda & 2y \\ -4 & 2y & 0 \end{vmatrix} = -16.(2-2\lambda) - 8y^2$

$H_0(0;0;2) = -16.(2-4) = 32 > 0 \Rightarrow$ no hay mínimo

$H_0(2\ ;\ 2\sqrt{2}\ ;1) = H_0(2\ ;-\ 2\sqrt{2}\ ;1\ ) = -\ 64 < 0 \Rightarrow$

$F(2\ ;\ 2\sqrt{2}\ )$ y $F(2\ ;\ -2\sqrt{2}\ )$ mínimos condicionados elativos.

La distancia mínima es en ambos casos $d=\sqrt{(2-4)^2+8} = \sqrt{12} = 2.\sqrt{3}$ $x^2 + y^2$

INTEGRALES DOBLES

I.-Definición

El acercamiento intuitivo al concepto de integral doble se hace a través del concepto de volumen, así como el de integral simple se hace a partir del de área.

Consideremos un campo escalar $F:A \to \mathbf{R}$ con $A \subseteq \mathbf{R}^2$ / $F(x;y) \geq 0$, $\forall (x;y) \in A$ y está acotado en A, siendo A un rectángulo en el plano xy.

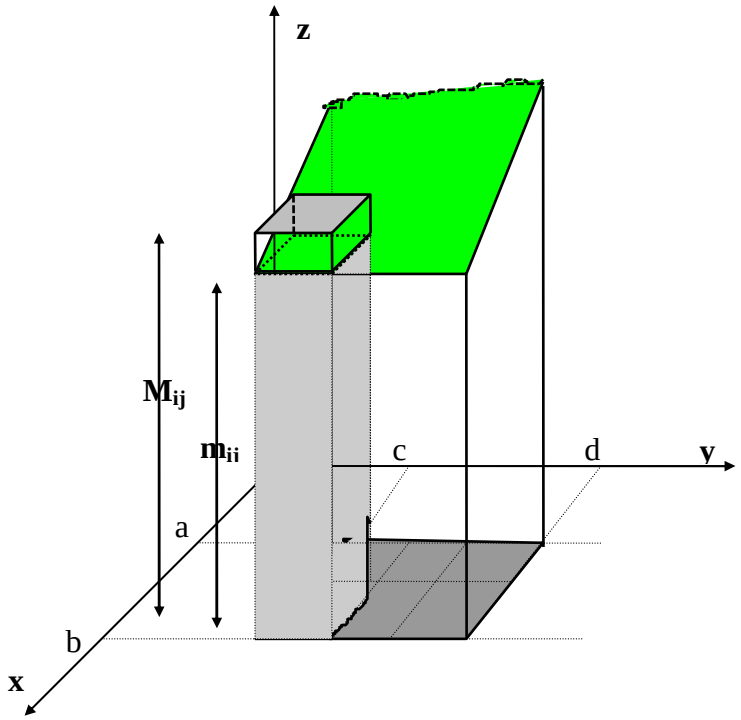
$$A = \{ (x;y) \in \mathbf{R}^2 / a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d \}$$

Interesa calcular el volumen del sólido limitado por el gráfico de z = F(x;y), los planos

z = 0 ; x = a ; x =b; y= c; y= d. El volumen de este sólido puede aproximarse sumando los volúmenes de paralelepípedos inscriptos o circunscriptos al mismo.

Como F es continua en A , por el segundo teorema de Weierstrass, adopta un máximo (M) y un mínimo (m) absolutos en A.

Se cumple que: $(b-a)(d-c)m \leq V \leq (b-a)(d-c)M$



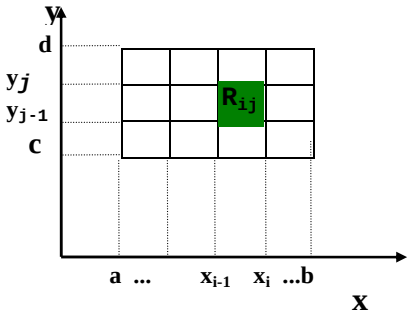
Provocamos una partición regular en [a,b] y otra en [c;d].

$a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots < x_{i-1} < x_i <\ldots x_n = b$

con $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$

$c = y_0 < y_1 < y_2 <\ldots < y_{j-1} < y_j <\ldots < y_n = d$

con $\Delta y_j = y_j - y_{j-1} = \dfrac{d-c}{m}$



Indicamos con R_{ij} al rectángulo de área $\Delta R_{ij} = \Delta x_i . \Delta y_j$
Supongamos F(x;y) continua en A, también lo será en cada uno de los subrectángulos en los que quedó dividido. Por lo tanto alcanza, por el segundo teorema de Weierstrass, un máximo y un mínimo absoluto que anotaremos M_{ij} y m_{ij} respectivamente.

Llamamos ***suma inferior con respecto a la partición P*** a la suma de los volúmenes de los paralelepípedos que resultan inscriptos en el sólido cuyo volumen buscamos.

$$\underline{S_P} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \Delta x_i . \Delta y_j$$

Se cumple: $\underline{S_P} \leq V$, siendo V el volumen del sólido que nos interesa calcular.

Con el mismo criterio, definimos como ***suma superior con respecto a la partición P*** a la suma de los volúmenes de los paralelepípedos que resultan circunscriptos al sólido cuyo volumen buscamos.

$$\overline{S_P} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} M_{ij} \Delta x_i . \Delta y_j$$

Se verifica : $\overline{S_P} \geq V$

Luego, para una cierta partición P : $\underline{S_P} \leq V \leq \overline{S_P}$

Si refinamos la partición , es decir tomamos cada vez más puntos sobre el eje "x" y cada vez más sobre el "y", y llamamos P' a la nueva, podemos definir para ella una nueva suma inferior y una nueva suma superior ($\underline{S_{P'}}$ y $\overline{S_{P'}}$ respectivamente) que aproximan mejor el volumen buscado.

Obtenemos: $\underline{S_P} \leq \underline{S_{P'}} \leq V \leq \overline{S_{P'}} \leq \overline{S_P}$

Repitiendo este proceso se forman dos sucesiones: una de sumas inferiores, creciente y otra de sumas superiores, decreciente; ambas acotadas superior e inferiormente respectivamente, por V. La diferencia entre dos términos correspondientes de ambas sucesiones es cada vez menor: $\overline{S_P} - \underline{S_P} \geq \overline{S_{P'}} - \underline{S_{P'}}$

Entonces ambas sucesiones admiten un límite común .(Si $F(x;y) \geq 0, \forall (x;y) \in A$, este límite representa el volumen buscado)

Se llama ***integral doble de F(x;y) sobre el recinto A*** al límite de las sumas inferiores o de las sumas superiores cuando el número de puntos de ambas particiones tiende a ∞.

$$\iint_A F(x;y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

Si consideramos en cada subrectángulo de área $\Delta x_i . \Delta y_j$,un punto arbitrario $\vec{P}_{ij} = \left(\alpha_i ; \beta_j\right)$, se tiene que:

$$m_{ij} \leq F(\vec{P}_{ij}) \leq M_{ij},$$

y por lo tanto:

$$S_P \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} F(\vec{P}_{ij})\Delta x_i . \Delta y_j \leq S_P$$

Esta suma, que se encuentra permanentemente comprendida entre la suma inferior y la superior de una misma partición, se llama ***"suma integral"*** o ***"suma de Riemann***". Cuando el número de puntos tiende a ∞, la sucesión de sumas de Riemann tiende al mismo límite que la de sumas inferiores o superiores.

$$\iint_A F(x;y)dxdy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} F(\vec{P}_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$$

II.-Condiciones de integrabilidad

Consideremos F definida y acotada en A.

II.1.- F es integrable en A $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ una partición P / $\overline{S_P} - \underline{S_P} < \varepsilon$

II.2.- Si F es continua en A, entonces es integrable en A.

II.3.- Si F es continua en A o su conjunto de discontinuidades es de medida nula[1], entonces es integrable

Por comodidad, generalmente se trabaja con funciones continuas, pero no son las únicas funciones integrables.

III.- Interpretación geométrica

Si $F(x;y) \geq 0, \forall (x;y) \in A$, la suma inferior representa la suma de los volúmenes de priasmas rectos rectángulos inscriptos en el sólido limitado por los planos : z = 0, x = a, x =

---

[1]***Conjunto de medida nula*** Un conjunto A incluido en $\mathbf{R}^2$ tiene medida nula si y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \exists$ un conjunto finito de rectángulos que cubren a A, tales que la suma de sus áreas es menor que ε. Un segmento, una circunferencia, un arco de parábola son ejemplos de conjuntos de medida nula.

b, y = c, y = d y la superficie representativa de z = F(x;y); es decir constituye una aproximación por defecto del volumen de ese sólido.

La suma superior, con el mismo criterio, representa una aproximación por exceso de dicho volumen.

Tales aproximaciones mejoran a medida que aumenta el número de puntos de la partición, por ello resulta:

$$\iint_A F(x;y)dx.dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \underline{S_P} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \overline{S_P} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} F\left(\vec{P}_{ij}\right)\Delta x_i.\Delta y_j = V$$

IV.- Propiedades

IV.1.- Si A_1 y A_2 son dos rectángulos cuya intersección tiene medida nula y tales que la unión da el rectángulo A, entonces si F es integrable sobre A_1 y sobre A_2 se cumple:

$$\iint_{A_1} F(x;y).dx.dy + \iint_{A_2} F(x;y).dx.dy = \iint_A F(x;y).dx.dy$$

IV.2.- Si F y G son integrables en A, entonces:

$$\iint_A [F(x;y) + G(x;y)]dx.dy = \iint_A F(x;y)dx.dy + \iint_A G(x;y).dx.dy$$

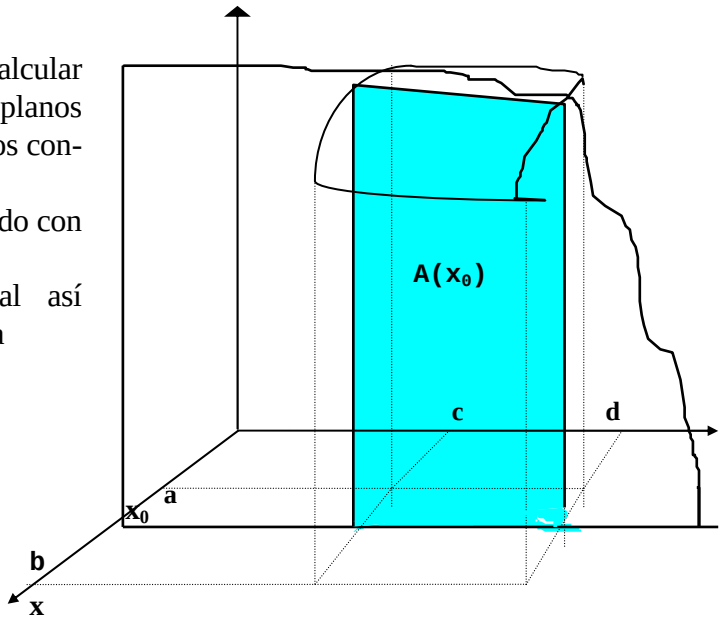
V.-Cálculo de integrales dobles

V.1.- Para recintos rectangulares

Considero z = F(x;y) continua en el rectángulo A = [a,b]x[c,d] tal que $z \geq 0$, $\forall(x;y) \in A$

Supongamos que nos proponemos calcular el volumen que limita la sup. con los planos z=0, x=a, x=b, y=c, y=d, utilizando los conceptos de Análisis Matemático I.
Consideremos la intersección del sólido con el plano $x = x_o$ siendo $a \leq x_o \leq b$.
El área de la sección transversal así determinada puede calcularse con una integral simple.

$$A(x_0) = \int_c^d F(x_0;y).dy$$



Si provocamos una partición regular en [a,b], y elegimos un punto arbitrario c_i en cada subintervalo, podremos decir que el volumen se puede calcular mediante:

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(c_i)\cdot \Delta x_i$$

pero por definición de integral simple, resulta:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b dx.\int_c^d F(x;y).dy$$

Al mismo resultado puede llegarse determinando las secciones con planos y = cte. Entonces el volumen es:

$$V = \int_c^d [\int_a^b F(x;y)\,dy]\,dx$$

Entonces el volumen es:

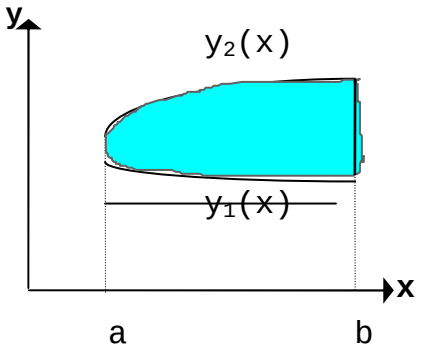
$$\boxed{\iint_R F(x;y)\,dx\,dy = \int_c^d [\int_a^b F(x;y)\,dx]dy = \int_a^b [\int_c^d F(x;y)\,dy]dx}$$

V.2.- Cálculo de Integrales dobles en recintos no rectangulares

V.2.1.-Tipos de recintos no rectangulares

V.*2.1.1.-**Recintos no rectangulares simples TIPO I*

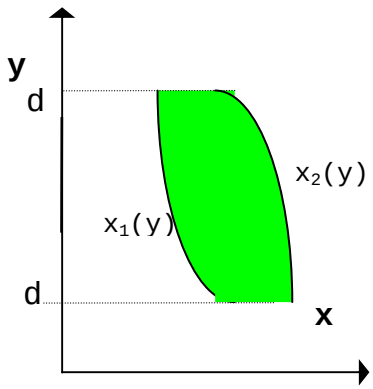
Son los que pueden definirse mediante $\begin{cases} y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$



V.2.1.2.--*Recintos no rectangulares simples TIPO II*

Son los que pueden definirse mediante $\begin{cases} x_1(y) \le x \le x_2(y) \\ c \le y \le d \end{cases}$

Los demás recintos con los que trabajaremos pueden



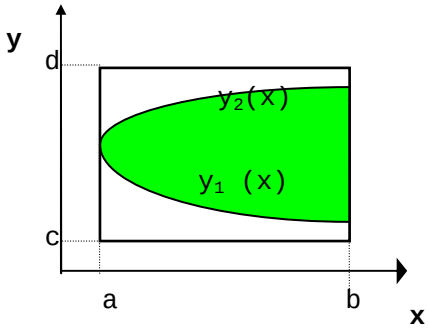
descomponerse en uniones de recintos simples tipo I y/o II.

V.2.2 .-Cálculo de integrales dobles definidas en recintos simples no rectangulares.

Consideremos un recinto simple *D* ,por ejemplo del tipo I. Suponemos F continua en D excepto, a lo sumo, en un conjunto de medida nula. Interesa calcular $\iint_D F(x;y).dx.dy$

Llamaremos A a un rectángulo que contiene a D

Definimos: $F^*(x;y) = \begin{cases} F(x;y) & si\ (x;y) \in D \\ 0 & si\ (x;y) \in A - D \end{cases}$. F es continua en A, salvo a lo largo de un conjunto de medida nula. Luego F es integrable en A

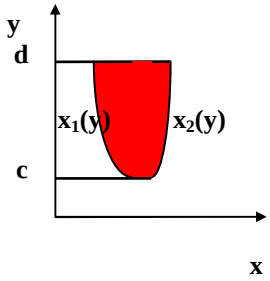


$$\iint_D F(x;y)dx.dy = \iint_A F^*(x;y)dx.dy =$$

$$\int_a^b \left[\int_c^{y_1(x)} \underbrace{F^*(x;y).dy}_{0} + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \underbrace{F^*(x;y).dy}_{F(x;y)} + \int_{y_2(x)}^{d} \underbrace{F^*(x;y).dy}_{0} \right] dx =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x;y).dy$$

Luego: $\boxed{\iint_D F(x;y).dx.dy = \iint_A F^*(x;y).dx.dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x;y).dy}$



Si el recinto D es tipo II, se llega a : $\boxed{\iint_D F(x;y).dx.dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} F(x;y).dx}$

V.3.-Cambio de variables en integrales dobles

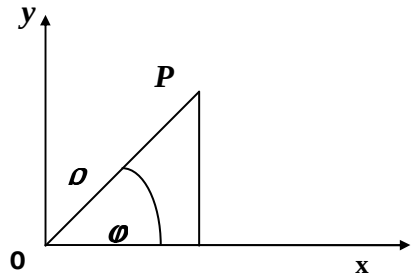
V.3.1.-Coordenadas polares

En coordenadas polares la posición de un punto en el plano queda determinado por las coordenadas: $\rho \in \mathbf{R}^+_0$: radio vector y $\varphi \in [0, 2\pi)$ (argumento).

Las fórmulas del pasaje son: $\begin{cases} x = \rho.\cos\varphi \\ y = \rho.\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$

o bien $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi = arc\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$



II.2.-Integral doble en coordenadas polares

Sea F: D→**R** con D ⊆ $\mathbf{R}^2$ integrable. Interesa calcular $\iint_D$ F(x;y) dx dy haciendo el cambio de coordenadas $\begin{cases} x = \rho.\cos\varphi \\ y = \rho.\operatorname{sen}\varphi \end{cases}$

Para calcular la integral en coordenadas polares, hay que expresar el recinto y el campo escalar en esas coordenadas (F(x;y) = F*($\boldsymbol{\rho}$;$\boldsymbol{\varphi}$).) Definiremos integral doble en coordenadas polares.

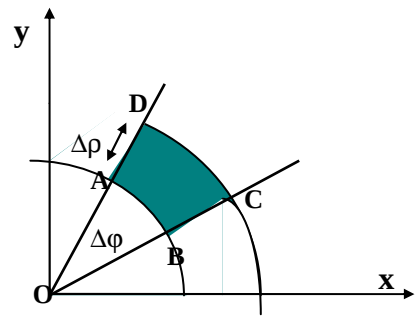
Provocamos particiones regulares en los intervalos de variación de $\boldsymbol{\rho}$ y de $\boldsymbol{\varphi}$.

Para valores constantes de $\boldsymbol{\rho}$, quedan definidas circunferencias concéntricas y para valores constantes de $\boldsymbol{\varphi}$ se determinan semirrectas con origen en el centro de coordenadas.

El recinto queda , entonces, dividido en trapecios circulares de área A_{ij} .

$$A_{ij} .= \text{área}\,\widehat{ODC} - \text{área}\,\widehat{OAB} = \frac{1}{2}\,\rho_2^2\,\Delta\varphi - \frac{1}{2}\,\rho_1^2\,\Delta\varphi = \frac{1}{2}\,(\rho_2^2 - \rho_1^2)\,\Delta\varphi$$

$$A_{ij} .= \underbrace{\frac{1}{2}\,(\rho_2 + \rho_1)}_{\boldsymbol{\rho_m}}\underbrace{(\rho_2 - \rho_1)}_{\Delta\rho}\,\Delta\varphi = \rho_m\,\Delta\rho\,\Delta\varphi$$



Para definir la integral doble, hacemos una partición regular en el recinto de integración expresado en coordenadas polares. En cada elemento de área, es decir, en cada uno de los trapecios circulares elegimos un punto arbitrario P_{ij} ($\boldsymbol{\rho_i}$;$\boldsymbol{\varphi_j}$) y calculamos F*($\boldsymbol{\rho_i}$;$\boldsymbol{\varphi_j}$). Por definición de integral doble:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} F^*(\rho_i;\varphi_j).A_{ij} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} F^*(\rho_i;\varphi_j).\,\rho_{mij}\Delta\rho_i.\Delta\varphi_j = \iint_{D(\rho;\varphi)} F^*(\rho;\varphi).\rho.d\rho.d\varphi$$

Como las integrales dobles en cartesianas o en polares, deben dar lo mismo, resulta:

$$\boxed{\iint_{D(x;y)} F(x;y).dx.dy = \iint_{D(\rho;\varphi)} F^*(\rho;\varphi).\rho.d\rho.d\varphi}$$

Observación: Vemos que para resolver una integral doble pasando de coordenadas cartesianas a polares, debemos expresar el recinto y la función en las nuevas coordenadas , reemplazar los diferenciales y multiplicar por un factor de conversión que es $\boldsymbol{\rho}$.

Llamaremos jacobiano de la transformación al determinante de la matriz jacobiana de las viejas variables en función de las otras. En el caso del pasaje a coordendas parciales, la matriz jacobiana (o la matriz derivada) es:

$$\frac{\partial\ x,y}{\partial\ \rho,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho.\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix}$$ y su determinante es:

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\,\text{sen}\,\varphi \\ \text{sen}\,\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.\cos^2\varphi + \rho.\text{sen}^2\varphi = \rho\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \text{sen}^2\varphi)}_{1} = \rho$$

El resultado del jacobiano es justamente el factor de conversión. (Si hubiésemos cambiado el orden de las filas o las columnas de la matriz derivada, hubiese cambiado el signo del determinante. Sin embargo, el factor de conversión está relacionado con un área, por lo tanto siempre se toma el módulo del jacobiano**.**

Para hacer un cambio de coordenadas cualquiera, por ejemplo :
x = x (u;v)
y = y (u;v) se procede de manera similar: se expresa el recinto y el campo escalar en función de las nuevas variables, se reemplazan los diferenciales y se multiplica por un factor de conversión que es el módulo del jacobiano de la transformación.

$$\iint_{D(x;y)} F(x;y).dx.dy = \iint_{D(u;v)} F^*(x(u;v);y(u;v)).|J|du.dv$$

siendo

$$|J| = \left| Det.\begin{pmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{pmatrix} \right|$$

<u>V.3.3.- Cambio de variables en integrales dobles</u>
<u>TEOREMA</u>

Consideremos dos regiones simples del plano D y D* y una ***<u>transformación C^1</u>***

<u>inyectiva</u> $\vec{T}$:D*→D / $\vec{T}$ **(D*)=D** definida por $\vec{T}$ (u;v)= (x (u;v);y (u;v))

Entonces , si F:D→R es integrable en D, resulta:

$$\boxed{\int_D F(x;y)\ dx.dy = \int_{D^*} F\ \big(x(u;v);y(u;v)\big).\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|.du.dv}$$

<u>Observaciones:</u>

1.- $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ es el módulo del determinante de la matriz jacobiana.

2.- Pedir que $\vec{T}$ **(D*)=D** es equivalente a pedir que $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \neq 0, \forall(u,v) \in D^*$

INTEGRALES TRIPLES

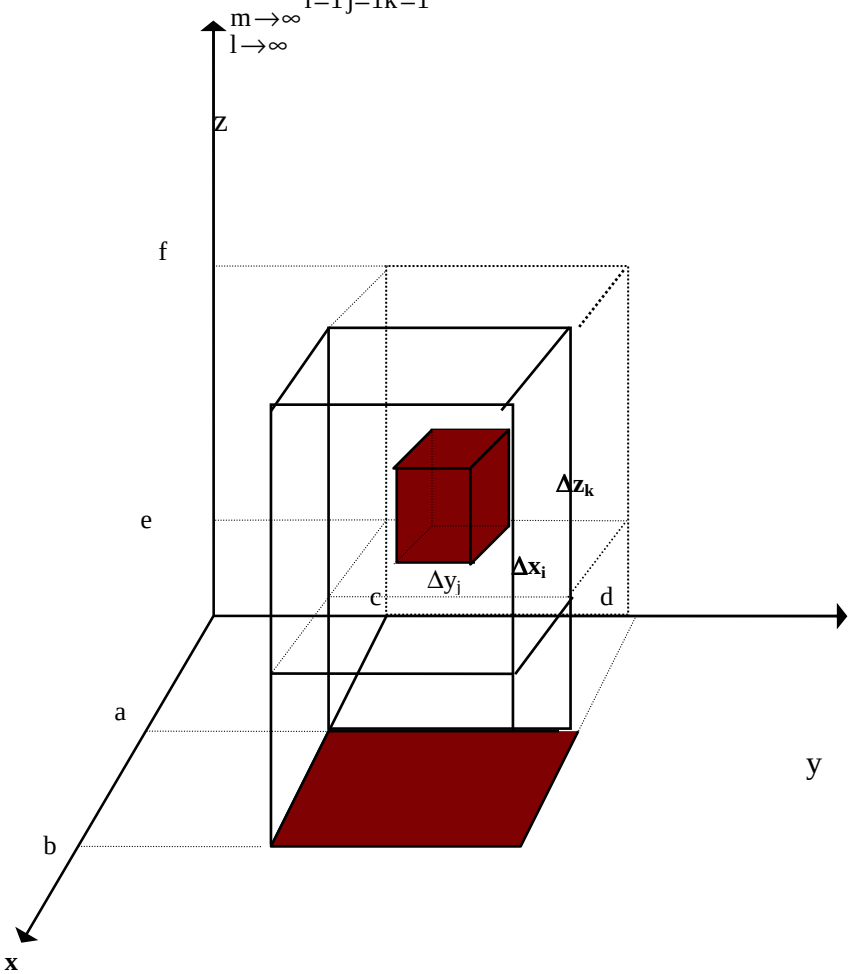
Consideremos un campo escalar F: A→**R** con A ⊆ $\mathbf{R}^3$ / A = [a,b]x[c,d]x[e,f]. Supongamos que F está acotada en A . Definiremos integral triple utilizando un procedimiento similar al que usamos para definir integrales dobles.

Provocamos particiones regulares en [a,b], [c,d] y [e,f]. El dominio A queda dividido en porciones elementales de volumen $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$, donde

$\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$; $\Delta y_j = \dfrac{d-c}{m}$; $\Delta z_k = \dfrac{f-e}{l}$.

En cada uno de esos prismas elementales, elegimos un punto arbitrario $P_{ijk}(\alpha_i; \beta_j; \gamma_k)$ y calculamos el valor de F en él. Se define:

$$\iiint_A F(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty \\ l\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} F(\alpha_i;\beta_j;\gamma_k)\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$$



Se puede probar que si F es continuo en A, o tiene discontinuidades sobre un conjunto de medida nula, entonces es integrable en A.

Al igual que en integrales dobles, el cálculo se reduce a tres integrales simples sucesivas o iteradas:

$$\int_e^f \left[\int_c^d \left[\int_a^b F(x;y;z)\, dx \right] dy \right] dz$$

Cambiando el orden de integración se pueden definir 6 integrales, pero todas iguales entre sí e iguales a la integral triple.

$$\boxed{\iiint_A F(x;y;z)\, dx\, dy\, dz = \int_e^f \left[\int_c^d \left[\int_a^b F(x;y;z)\, dx \right] dy \right] dz}$$

También completando la analogía con integrales dobles, puede extenderse la definición a recintos que NO sean prismas rectos rectángulos.

Sea V un recinto cualquiera incluido en $\mathbf{R}^3$ y sea A un prisma recto rectángulo que lo contenga. Siguiendo un razonamiento similar al que hicimos con integrales dobles, puede verse que:

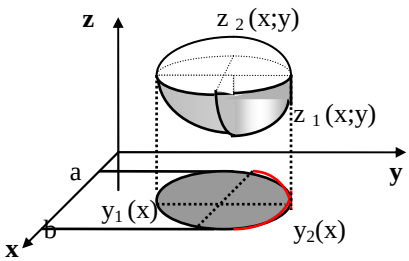
$$\iiint_V F(x;y;z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_A F^*(x;y;z)\, dx\, dy\, dz$$

siendo $F^*(x;y;z) = \begin{cases} F(x;y;z) & si\ (x;y;z) \in V \\ 0 & si\ (x;y;z) \in A - V \end{cases}$

Clasificaremos los recintos V en distintos tipos:

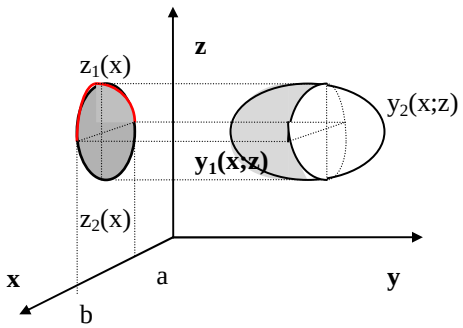
- Tipo I : $a \le x \le b$
  $y_1(x) \le y \le y_2(x)$
  $z_1(x;y) \le z \le z_2(x;y)$

  o bien: $c \le y \le d$
  $x_1(y) \le x \le x_2(y)$
  $z_1(x;y) \le z \le z_2(x;y)$

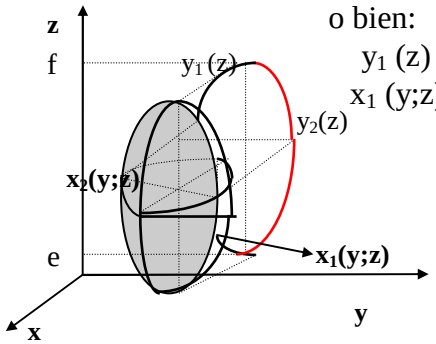


- Tipo II : $a \le x \le b$
  $z_1(x) \le z \le z_2(x)$
  $y_1(x;z) \le y \le y_2(x;z)$

  o bien: $e \le z \le f$
  $x_1(z) \le x \le z_2(z)$
  $y_1(x;z) \le y \le y_2(x;z)$



- Tipo III: $c \le y \le d$
  $z_1(y) \le z \le z_2(y)$
  $x_1(y;z) \le x \le x_2(y;z)$



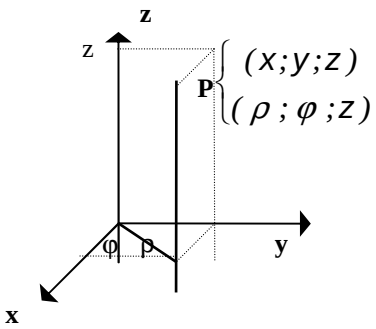
o bien: $e \le z \le f$
$y_1(z) \le y \le y_2(z)$
$x_1(y;z) \le x \le x_2(y;z)$

Por ejemplo, para un recinto como el del último dibujo es:

$$\iiint_V F(x;y;z)\,dx\,dy\,dz = \int_e^f dz \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \int_{x_1(y;z)}^{x_2(y;z)} F(x;y;z)\,dx$$

II.-Cambio de variables en integrales triples

II.1Coordenadas clíndricas:



(Son equivalentes a las polares del plano)
Las fórmulas del pasaje son:

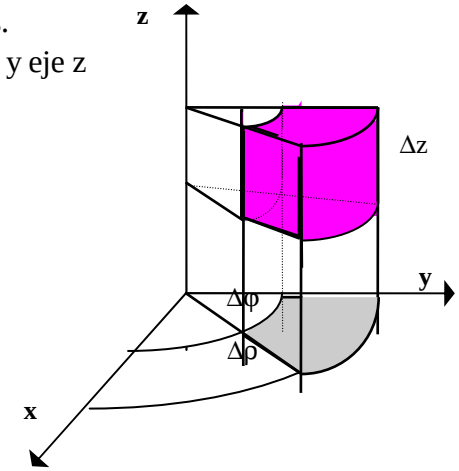
$x = \rho \cos\varphi$
$y = \rho \operatorname{sen}\varphi$
$z = z$

El jacobiano de la transformación es:

$$\left|\frac{\partial\, x,y,z}{\partial\, \rho,\varphi,z}\right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\operatorname{sen}^2\varphi = \rho\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)}_{1} = \rho$$

Geométricamente puede justificarse considerando el volumen de un sólido elemental producido por particiones en coordenadas cilíndricas.

ρ = cte $\Rightarrow$ superficies cilíndricas de directriz circular y eje z
φ = cte $\Rightarrow$ semiplanos de borde z
z = cte $\Rightarrow$ planos paralelos al plano (x,y)



ΔV_i = área de D_i .Δ z
$\Delta V_i = \rho.\Delta\rho\,.\,\Delta\varphi.\,\Delta z$

(pues el área de D_i es el área de un

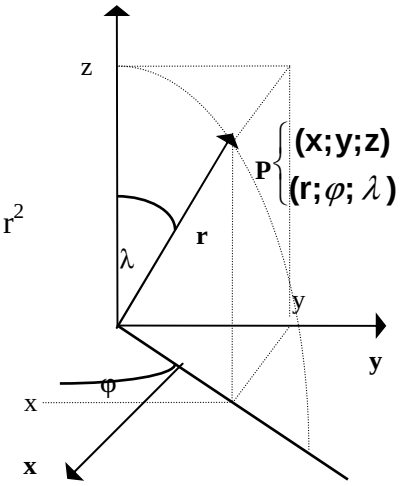
trapecio circular en coordenadas polares)

Con un razonamiento similar al que se hizo con integrales dobles, resulta:

$$\boxed{\iiint_{V_{xyz}} F(x;y;z)dx\,dy\,dz = \iiint_{V_{\rho\varphi z}} F^*(\rho;\varphi;z)\ \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz}$$

<u>Coordenadas esféricas</u>:

Un punto P de $\mathbf{R}^3$ puede quedar ubicado también por sus ***<u>coordenadas esféricas</u>***, que son : el radio vector $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^+_0$ (es la distancia entre el centro de coordenadas y el punto P); el ángulo λ, que forma el semieje positivo de las z con el radio vector ($\lambda \in [0, \pi]$); y el ángulo φ que forma el semieje positivo de las x con la proyección de **r** sobre el plano xy, ($\varphi \in [0,2\pi)$).



Las fórmulas del pasaje son: $x = r \operatorname{sen} \lambda \cos\varphi$

$y = r \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \varphi$

$z = r \cos\lambda$

Resulta: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 [\operatorname{sen}^2\lambda \underbrace{(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)}_{1} + \cos^2\lambda) = r^2 \underbrace{\qquad}_{1}$

El jacobiano de la transformación es:

$$\left|\frac{\partial\, x,y,z}{\partial\, r,\lambda,\varphi}\right| = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\lambda\cos\varphi & r\cos\lambda\cos\varphi & -r\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\varphi & r\cos\lambda\operatorname{sen}\varphi & r\operatorname{sen}\lambda\cos\varphi \\ \cos\lambda & -r\operatorname{sen}\lambda & 0 \end{vmatrix} =$$

$= r^2\operatorname{sen}^3\lambda \operatorname{sen}^2\varphi + r^2\cos^2\lambda \operatorname{sen}\lambda \cos^2\varphi + r^2\cos^2\lambda \operatorname{sen}\lambda \cos^2\varphi + r^2\operatorname{sen}^3\lambda \cos^2\varphi$
$=$

$= r^2\operatorname{sen}^3\lambda \underbrace{(\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{1} + r^2\cos^2\lambda \operatorname{sen}\lambda \underbrace{(\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{1} =$

$= r^2 \operatorname{sen}\lambda . \underbrace{(\operatorname{sen}^2\lambda + \cos^2\lambda)}_{1} = r^2 \operatorname{sen}\lambda$

Luego : $$\boxed{\iiint_{V_{xyz}} F(x;y;z)dx\,dy\,dz = \iiint_{V_{r\lambda\varphi}} F^*(r;\lambda;\varphi)\ r^2 \operatorname{sen}\lambda\ dr\, d\lambda\, d\varphi}$$

La fórmula puede interpretarse geométricamente, tomando un elemento de volumen en coordenadas esféricas. Para ello debemos tener en cuenta que :

$r = cte \Rightarrow$ sup. esférica

$\lambda = cte \Rightarrow$ sup. cónica de eje z y vértice en (0;0;0).

$\varphi = cte \Rightarrow$ semiplano de borde z

$\overline{AC} = \Delta r$

$\overset{\frown}{AB} = r \operatorname{sen} \lambda \, \Delta\varphi$

(es un arco que está en la curva intersección de una superficie esférica con una sup. cónica).

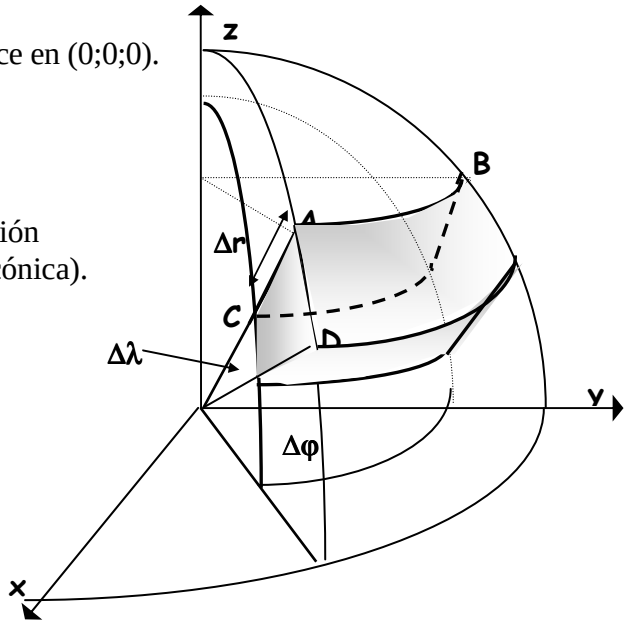
(Recordar: long.arco = r. áng. en rad.)

$\overset{\frown}{AD} = r \, \Delta\lambda$

$\Delta V = \text{long. } \overline{AC} \text{. long. } \overset{\frown}{AB} \text{. long} \overset{\frown}{AD}$

$\Delta V = r \operatorname{sen}\lambda . \Delta r . r . \Delta\varphi . \Delta\lambda$

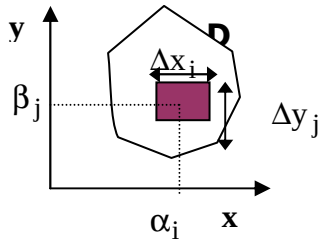
$\Delta V = r^2 . \operatorname{sen}\lambda . \Delta r . \, . \Delta\varphi . \Delta\lambda$



➢ *APLICACIONES FÍSICAS DE LAS INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES*

- ***Cálculo de la masa.***

a) Consideremos una lámina D de espesor despreciable, cuya densidad en un punto $\vec{P}$ esté dada por una función continua $\delta(x;y)$.



Efectuamos una partición regular de D en rectángulos de área $\Delta x_i . \Delta y_j$. En cada uno de ellos, elegimos un punto arbitrario $(\alpha_i ; \beta_j)$ y calculamos la densidad en él.

La masa del rectángulo es aproximadamente:

$M_{ij} = \delta(\alpha_i ; \beta_j) \; \Delta x_i . \Delta y_j$.

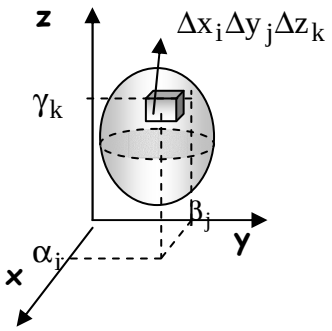
La masa total de la lámina , puede calcularse mediante

$$\lim_{(n;m)\to(\infty;\infty)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \delta(\alpha_i ; \beta_j).\Delta x_i .\Delta y_j = \iint_D \delta(x;y).dx.dy \quad \text{(por definición de integral doble)}$$

b)

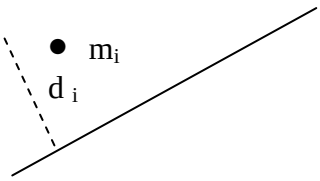
Con una razonamiento similar, si se desea calcular la masa de un sólido V, cuya densidad en cada punto es un función continua $\delta(x;y;z)$, se llega a:

$$M = \iiint_V \delta(x;y;z).dx.dy.dz$$



- ***Momentos estáticos de primer orden***

Dado un punto material de masa m y un eje que se encuentra a una distancia d, se define como moménto estático de primer orden al producto de la masa por la distancia del punto a eje.
Razonando como en el caso anterior, se llega a:



a)Para la lámina D:

$$M_x = \iint_D y.\delta(x;y)dx.dy \quad ; \qquad M_y = \iint_D x.\delta(x;y)dx.dy$$

b) Para un sólido V: $M_{xy} = \iiint_V z.\delta(x;y;z)dx.dy.dz$

$$M_{yz} = \iiint_V x.\delta(x;y;z)dx.dy.dz \; ; \quad M_{xz} = \iiint_V z.\delta(x;y;z)dx.dy.dz$$

- ***Coordenadas del centro de masa o centro de gravedad o baricentro***

Para un sistema de puntos materiales , el centro de masa es el punto en el que debe pensarse concentrada la masa para que se conserven los momentos estáticos de primer orden.
a)Para una lámina , las coordenadas del baricentro (G) deben cumplir:

$$X_G.\,M = M_y \Rightarrow X_G = \frac{\iint_D x.\delta(x;y)dx.dy}{\iint_D \delta(x;y).dx.dy} \quad ; \quad Y_G.\,M = M_x \Rightarrow Y_G = \frac{\iint_D y.\delta(x;y)dx.dy}{\iint_D \delta(x;y).dx.dy}$$

b) Para un sólido V, resulta:

$$X_G = \frac{\iiint_V x.\delta(x;y;z)dx.dy.dz}{\iiint_V \delta(x;y;z)dx.dy.dz} \; ; \qquad Y_G = \frac{\iiint_V y.\delta(x;y;z)dx.dy.dz}{\iiint_V \delta(x;y;z)dx.dy.dz} \; ;$$

$$Z_G = \frac{\iiint_V z.\delta(x;y;z)dx.dy.dz}{\iiint_V \delta(x;y;z)dx.dy.dz}$$

- ***Momento de Inercia***

Para una punto material, el momento de inercia respecto de un eje es: $I= m.d^2$
Entonces, para una lámina es:

$$I_x = \iint_D y^2.\delta(x;y)dx.dy \qquad ; \; I_y = \iint_D x^2.\delta(x;y)dx.dy$$

Para un sólido:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2).\delta(x;y;z)dx.dy.dz \; ; \qquad I_y = \iiint_V (x^2 + z^2).\delta(x;y;z)dx.dy.dz \; ;$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2).\delta(x;y;z)dx.dy.dz$$

INTEGRALES CURVILÍNEAS (O DE LÍNEA)

➢ ***Longitud de un arco de curva***

- ***Curva rectificable***

Recordamos que una ***curva*** es el conjunto imagen de una función vectorial continua.
La función es la ***trayectoria.*** Si la función es inyectiva, la curva es ***simple.***

Consideremos $\vec{f}$: [a,b] $\rightarrow$ $\mathbf{R^m}$ con m >1/ $\vec{f}(t) = \left(f_1(t); f_2(t); \cdots; f_m(t)\right)$ continua e inyectiva. Una partición regular en [a,b] mediante a = t_0 <t_1 <....<t_m=b, introduce una partición en la curva C , asociada a $\vec{f}$. Si se consideran los puntos determinados sobre sobre **C ,** la longitud de la poligonal inscripta que queda formada es

$$S_P = \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}|$$

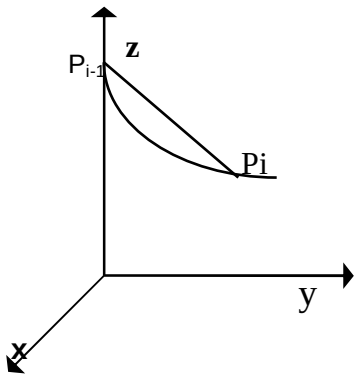
Llamamos ***curva rectificable*** a aquélla en la que el conjunto de los S_P está acotado superiormente.

Llamamos ***longitud de arco*** al supremo de ese conjunto

- ***Longitud de un arco de curva***

Sea $\vec{f}$: [a,b] $\rightarrow$ $\mathbf{R^3}$ / $\vec{f}$ (t)=(x(t);y(t);z(t)) con derivadas continuas

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{x'^2(\alpha_i) + y'^2(\beta_i) + z'^2(\delta_i)}\ \Delta t$$



T.del V. Medio en una variable ($t_{i-1} < \alpha_i < t_i$,
$t_{i-1} < \beta_i < t_i$
$t_{i-1} < \gamma_i < t_i$)

La longitud del arco es:

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n} \sqrt{x'^2(\alpha_i) + y'^2(\beta_i) + z'^2(\delta_i)}\,\Delta t$$

Si la función tiene sus derivadas continuas en [a,b], resulta:

Notación: s : arco
ds: diferencial arco

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}.dt}$$

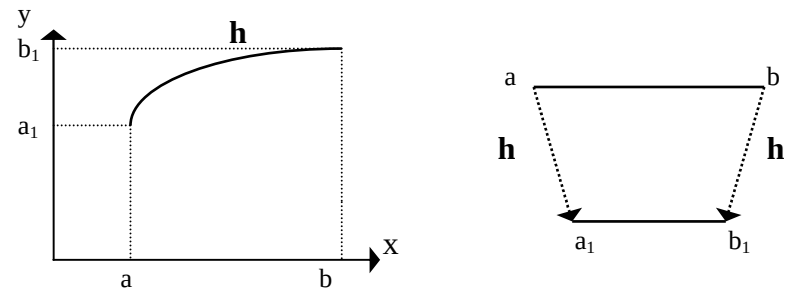
Luego, s'(t)= $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} = \|\vec{f}'(t)\|$ y ds = $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$ .dt

- ***Reparametrización de una trayectoria***

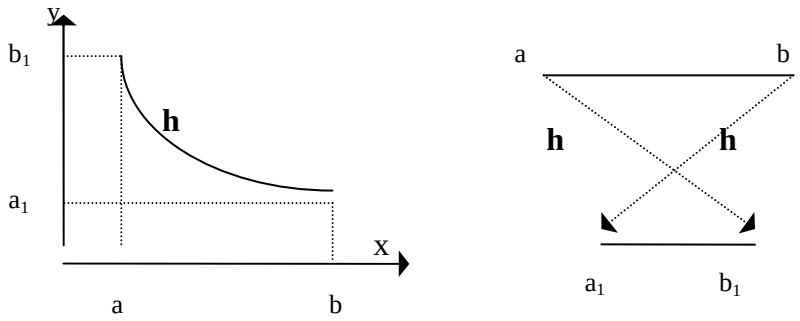
Consideramos una trayectoria $\vec{f}:[a_1,b_1]\to\mathbf{R}^3$ y una función escalar biyectiva $h \in C^1$ / $h:[a,b] \to [a_1, b_1]$.

Llamamos ***reparametrización*** de $\vec{f}$ a la composición $\vec{g} = \vec{f} \circ h$: $[a,b] \to \mathbf{R}^3$

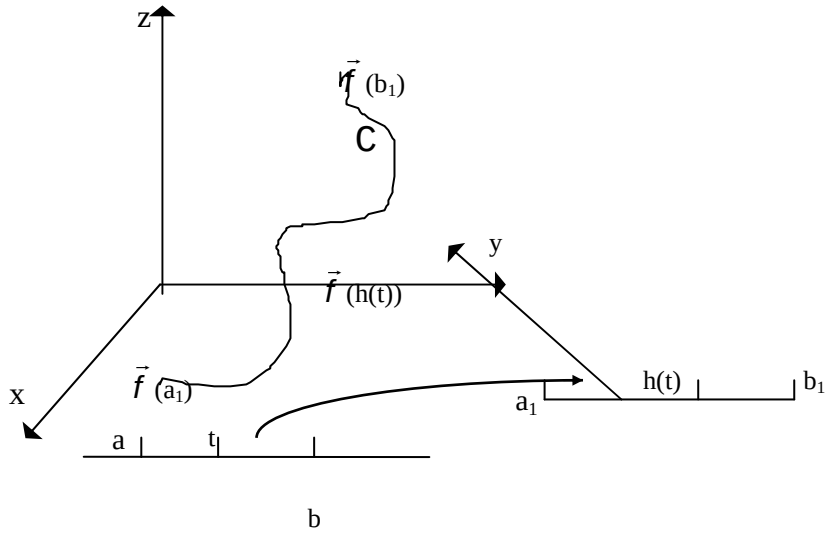
OBSERVACIÓN: Se desprende de la definición que la reparametrización convierte extremos en extremos, es decir $h(a)= a_1$ y $h(b) = b_1$ o bien: $h(a)= b_1$ y $h(b) = a_1$.
En el primer caso la reparametrización preserva la orientación mientras que en el segundo la cambia. Esto significa que una partícula que describe $\vec{f}$ puede hacerlo o no en la misma dirección que otra que describa $\vec{g}$.
En el gráfico se muestra una reparametrización que preserva la orientación



Y en este otro una que invierte la orientación:



Si C es la imagen de $\vec{f}$ ($[a_1 ;b_1]$) y h preserva la orientación, entonces ($\vec{f}$ $_0$ h) (t) irá desde $\vec{f}$ (a_1) hasta $\vec{f}$ (b_1) mientras t va desde a hasta b; y si h invierte la orientación , ($\vec{f}$ $_0$ h) (t) irá desde $\vec{f}$ (b_1) hasta $\vec{f}$ (a_1) mientras t va desde a hasta b



Propiedad

La longitud de un arco de curva es independiente de la parametrización.-

Considero la curva C imagen de $\vec{f}:[a,b]\to R^3$; la longitud de arco está dada por: s=$\int_a^b \|\vec{f}'(t)\|\,dt$

Supongamos que se reparametriza la trayectoria mediante h:[a_1 , b_1]→[a,b] biyectiva y, por lo tanto, estrictamente creciente o estrictamente decreciente .

Consideremos h(a_1)= a y h(b_1)=b (1).

Interesa calcular la longitud de C respecto de $\vec{g}=\vec{f}\circ h:[a_1;b_1]\to R$,

De acuerdo con (1), es: $\vec{g}$(a_1) =$\vec{f}$ (a) y g(b_1) = $\vec{f}$ (b) , entonces:

s $=\int_{a_1}^{b_1}\|\vec{g}'(u)\|\,du$, pero: $\vec{g}'(u)=\vec{f}'(t)\cdot h'(u)$, por lo tanto: $\|\vec{g}'(u)\|=\|\vec{f}'(t)\|\cdot|h'(u)|$

Resulta : s = $\int_{a_1}^{b_1}\|\vec{f}'(t)\|\underbrace{|h'(u)|du}_{|dt|} = \int_a^b\|\vec{f}'(t)\|\,dt$ pues por (1) dt > 0

Si $\vec{g}$(a_1) =$\vec{f}$ (b) y $\vec{g}$ (b_1) = $\vec{f}$ (a), dt < 0 y queda:

s = $\int_{a_1}^{b_1}\|\vec{f}'(t)\||h'(u)|du = -\int_b^a\|\vec{f}'(t)\|\,dt=\int_a^b\|\vec{f}'(t)\|\,dt$

Entonces, la longitud <u>no depende</u> de la parametrización.

- ***<u>Integral curvilínea de un campo escalar</u>***

- ***Definición***

Consideremos un campo escalar F:**A**→**R** con **A** ⊆ **R³** continuo y una curva C ⊆ **A** , <u>C^1 a trozos</u>, (es decir, continua con derivada continua en [a,b], excepto, a lo sumo, en un número finito de puntos) imagen de $\vec{r}:[a,b]\to R^3$ / $\vec{r}(t)=(x(t);y(t);z(t))$.

Se llama integral curvilínea de F a lo largo de C a :

$$\int_C F(x;y;z)\cdot ds=\int_a^b F[x(t);y(t);z(t)]\cdot\|\vec{r}'(t)\|\cdot dt$$

Nota:

Se puede llegar a la definición y cálculo de la integral, construyendo las sumas de Riemann. Para ello, provocamos una partición regular en [a,b] , que induce una partición en la curva C en arcos de longitud Δs_i y formamos:

$$\sum_{i=1}^{n} F\big(x(\alpha_i);y(\alpha_i);z(\alpha_i)\big)\cdot \underbrace{\Delta s_i}_{\text{ver deducción long. arco de curva}} = \sum_{i=1}^{n} F\big(x(\alpha_i);y(\alpha_i);z(\alpha_i)\big)\cdot \underbrace{\|\vec{r}\,'(\alpha_i)\|\,\Delta t_i}_{\text{ver deducción long. arco de curva}}\ ,\ t_{i-1} < \alpha_i < t_i$$

Entonces: $$\boxed{\int_C F(x;y;z)\cdot ds = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} F\big(x(\alpha_i);y(\alpha_i);z(\alpha_i)\big)\cdot \|\vec{r}\,'(\alpha_i)\|\,\Delta t_i}$$

- ***Propiedades***

1.- Si F(x;y;z) = 1 , $\int_C ds = s$ (longitud del arco)

2.- Linealidad respecto del integrando:

$$\int_C [F(x;y;z)+G(x;y;z)]ds = \int_C F(x;y;z)ds + \int_C G(x;y;z)ds$$

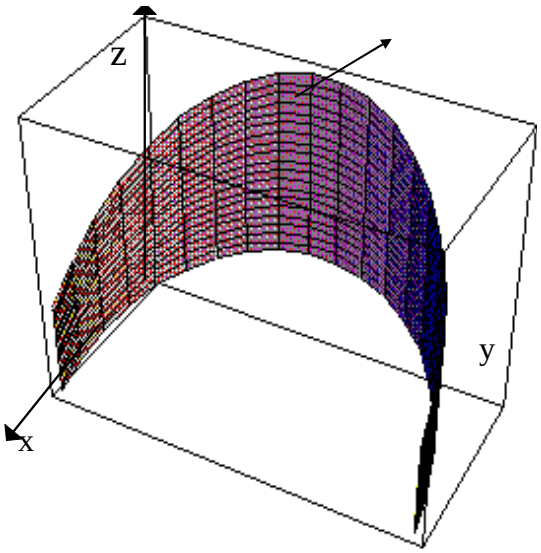
3.- Aditividad respecto de los arcos:

$$\int_{C_1\cup C_2} F(x;y;z)ds = \int_{C_1} F(x;y;z)ds + \int_{C_2} F(x;y;z)ds$$

- ***Interpretación geométrica***

Si F:**A**→**R** con **A** ⊆ $\mathbf{R}^2$ es tal que F(x;y) ≥ 0 y C es una curva plana , la integral curvilínea mide el área lateral de una superficie (una especie de "pared")que tiene por curva directriz a C y por altura a F(x;y) .

F(x;y)



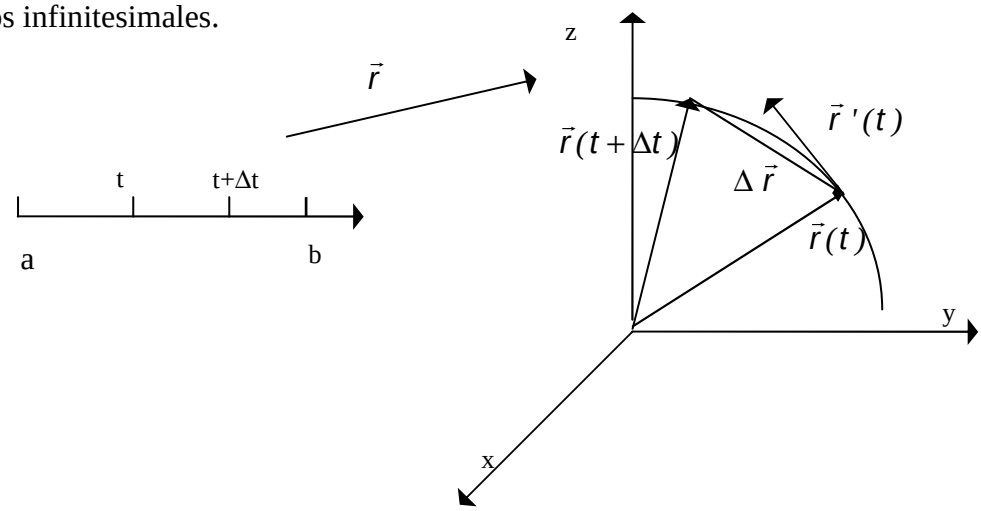
➢ ***<u>Integral curvilínea de un campo vectorial</u>***

- ***Introducción:***

Si $\vec{F}$ es , por ejemplo , un campo eléctrico y $\vec{r}$ la expresión de la trayectoria de una partícula, a veces interesa calcular el trabajo que realiza el campo sobre la partícula mientras ésta describe la trayectoria dada por $\vec{r}$.

Sabemos que si el desplazamiento d es rectilíneo y el campo es constante, el trabajo es : F.d .

Si la trayectoria es curva, podemos considerarla formada por una sucesión de desplazamientos rectos infinitesimales.



•

Si t varía en un intervalo pequeño de t a t +Δt , la partícula se mueve de $\vec{r}(t)$ a $\vec{r}(t+\Delta t)$, es decir : $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$, por el T. del valor medio, se puede aproximar por $\vec{r}\,'(t)\cdot\Delta t$.
En tonces el trabajo realizado para ir de $\vec{r}(t)$ a $\vec{r}(t+\Delta t)$ es aproximadamente:
$\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)\cdot\vec{r}\,'(t).\Delta t$.

Si provocamos una partición regular en [a,b], el trabajo realizado por $\vec{F}$ puede calcularse como : $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}\big(x(t_i);y(t_i);z(t_i)\big)\cdot\vec{r}'(t_i)\cdot\Delta t_i=\int\limits_a^b\vec{F}\big(x(t);y(t);z(t)\big)\cdot\vec{r}'(t)\cdot dt$

- ***Definición***

Sea $\vec{F}:A\to R^3$ con $A\subseteq R^3$ un campo escalar continuo y sea C $\subseteq A$,la curva asociada a $\vec{r}:[a,b]\to R^3$ / $\vec{r}\in C^1$ a trozos $\wedge\ \vec{r}(t)=\big(x(t);y(t);z(t)\big)$. Llamamos ***<u>integral curvilínea</u>*** de $\vec{F}$ a lo largo de C a: $\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_a^b\vec{F}[x(t);y(t);z(t)]\cdot\vec{r}'(t)\,dt$

Notación: Cuando la integral; se calcula sobre una curva cerrada se suele indicar así: $\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{r}$

- ***Cálculo***

$\vec{F}\big[x(t);y(t);z(t)\big]\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt=\vec{F}[x(t);y(t);z(t)]\cdot(x'(t);y\,'(t);z\,'(t)).dt\Rightarrow$

$$\boxed{\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_a^b\Big(F_1\big(x(t;y(t);z(t)x\,'(t)+F_2\big(x(t);y(t);z(t)\big).y'(t)+F_3\big(x(t);y(t);z(t)\big).z'(t)\big)dt\quad\Big)}$$

<u>Observación</u>: Finalmente se calcula la integral curvilínea de un campo escalar.

- ***Propiedad.***

Si $\vec{g}=\vec{r}\circ h:[a_1;b_1]\to R^3$ es la reparametrización de $\vec{r}:[a,b]\to R^3$ correspondiente a $h:[a_1;,b_1]\to[a,b]$, se cumple que: $\int\limits_{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\pm\int\limits_{\vec{g}}\vec{F}\cdot d\vec{g}$ según la reparametrización conserve o no la orientación.

- ***Integral curvilínea de un campo de gradientes***

(Independencia de la trayectoria de una integral curvilínea)

<u>Teorema:</u>

Consideremos $F:A\to R$ con $A\subseteq R^3$ / $F\in C^1$ y una curva $\mathbf{C}\in C^1$ a trozos, dada por $\vec{r}:[a,b]\to R^3$.

Entonces, si $\vec{\nabla}F$ es continuo, resulta: $\int\limits_C\vec{\nabla}F\cdot d\vec{r}=F\big[\vec{r}(b)\big]-F\big[\vec{r}(a)\big]$

Demostración:

$\int\limits_C\vec{\nabla}F\cdot d\vec{r}=\int\limits_a^b\vec{\nabla}F\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt=(1)$

Definimos $G = F_o \ \vec{r}$, entonces $\vec{\nabla} F \cdot \vec{r}\,'(t) = G\,'(t)$.

Reemplazando en (1) se tiene :

$$\int_C \vec{\nabla} F . d\vec{r} = \int_a^b G\,'(t)\,dt = \mathbf{G(b)- G(a)= F[}\vec{r}(b)\mathbf{]-F[}\vec{r}(a)\mathbf{]}$$

Entonces: $\boxed{\int_C \vec{\nabla} F \cdot d\vec{r} = F[\vec{r}(b)] - F[\vec{r}\ (a)]}$

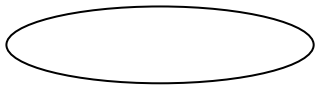
Si la curva es cerrada, la integral curvilínea de un campo de gradientes que cumpla las hipótesis mencionadas es cero.

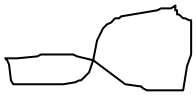
- ***Curva simple. Curva simple cerrada.***

<u>*Curva simple*</u> es la imagen de una función vectorial inyectiva $\vec{f}:[a,b] \to R^3$. En cada curva simple se pueden distinguir ***<u>dos orientaciones</u>*** La curva simple junto con su sentido de orientación se llama ***<u>curva simple orientada.</u>***

Si además $\vec{f}(a) = \vec{f}(b)$ la curva es ***<u>simple cerrada</u>*** o ***<u>curva cerrada</u>*** según $\vec{f}$ sea o no inyectiva. Las curvas cerradas también puede orientarse.

Curva simple cerrada





Curva cerrada (no simple)

➢ ***Campos conservativos***

Un campo vectorial es conservativo si y sólo si la integral curvilínea a lo largo de **<u>cualquier</u>** curva cerrada es cero.

- ***Función potencial***

Un campo vectorial $\vec{F}:A \to R^2$ con $A \subseteq R^2$ / $\vec{F}(x;y) = \left(P(x;y);Q(x;y)\right)$ es un campo de gradientes si y sólo si existe una función U(x;y) , llamada función potencial, tal que : $\vec{F}(x;y) = \vec{\nabla}U(x;y)$, o bien : $U'_x = P(x;y)$ y $U'_y = Q(x;y)$..

$$\text{Si } \int_C \vec{F}(x;y).\,d\vec{r} = 0,\ \forall\ C \Rightarrow \exists U(x;y)\ /\ \vec{F}(x;y) = \vec{\nabla}U(x;y).$$

- ***Condición necesaria para la existencia de la función potencial.***

Si $\vec{F}:A \to R^2$ con $A \subseteq R^2$ / $\vec{F}(x;y) = \left(P(x;y);Q(x;y)\right)$ es un campo de gradientes, siendo P(x;y), Q(x;y), $P'_y(x;y)$ y $Q'_x(x;y)$ continuas en un conjunto plano abierto y conexo, entonces $P'_y(x;y) = Q'_x(x;y)$ en todo punto de dicho recinto.

En efecto: Si $\vec{F}(x;y) = \vec{\nabla}U(x;y)$, entonces existe U(x;y) /

$$\begin{cases} Ux\,(x,y) = P(x,y) \Rightarrow U''_{xy} = P'_y\,(x;y) \\ U_y\,(x,y) = Q(x,y) \Rightarrow U''_{yx} = Q'_x\,(x;y) \end{cases}$$

Por el Teorema de Schwarz, al existir y ser continuas , las derivadas segundas cruzadas deben ser iguales .

Por lo tanto: $P'_y(x;y) = Q'_x(x;y)$

<u>Importante</u>: La condición es necesaria pero ***no suficiente.***

Veamos un ejemplo: Si un campo vectorial continuo es de gradientes, su integral curvilínea a lo largo de cualquier curva cerrada es cero.

Consideremos: $\vec{F}(x;y)=\left(\frac{-y}{x^2+y^2};\frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Veamos si las derivadas cruzadas de las componentes son o no iguales.

$$P'_y=\frac{-(x^2+y^2)+y.2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \quad y \quad Q'_x=\frac{(x^2+y^2)-x.2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Resulta: $P'_y(x;y)=Q'_x(x;y)$

Calculemos la integral curvilínea de $\vec{F}$ a lo largo de la curva imagen de la función vectorial $\vec{r}(t)=(\cos t;\ \text{sen}\ t)$.

Reemplazamos por: $\begin{cases} x=\cos t\ ;\ dx=-\text{sen}\ t \\ y=\text{sen}\ t\ ;\ dy=\cos t \end{cases}$. Como sobre la curva $x^2+y^2=1$, se tiene:

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{r}=\int_0^{2\pi}(\text{sen}^2 t+\cos^2 t)dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi\neq 0$$

Es decir: la integral curvilínea sobre una curva cerrada no es nula y por lo tanto no es un campo conservativo, aunque se cumpla la igualdad de las derivadas.

Observemos que las componentes y sus derivadas son continuas en R^2 -{(0;0)} que es un conjunto conexo pero no convexo.

La curva sobre la que se trabajó en el ejemplo, encierra al punto de discontinuidad mencionado. Si calculamos la integral sobre cualquier curva cerrada que deje afuera al punto de discontinuidad, veremos que la integral es efectivamente, nula. Por lo tanto diremos que este campo no es conservativo en R^2, pero sí lo es en cualquier subconjunto simplemente conexo que no contenga al (0;0).

- ***Condición necesaria y suficiente para que un campo sea conservativo***

Si $\vec{F}:A\to R^2$ con $A\subseteq R^2$ / $\vec{F}(x;y)=\left(P(x;y);Q(x;y)\right)$ es tal que P(x;y), Q(x;y), $P'_y(x;y)$ y $Q'_x(x;y)$ son continuas en un conjunto plano abierto y ***convexo***, entonces , la condición necesaria y suficiente para que $\vec{F}$ sea conservativo es que : $P'_y(x;y) = Q'_x(x;y)$ en todo punto de dicho recinto.

- ***Para campos escalares de más variables***

Se verifican condiciones similares:

Si $\vec{F}:A \to R^n$ con $A \subseteq R^n$ / $\vec{F}(x;y) = \left(F_1(\vec{X});F_2(\vec{X});\cdots;F_n(\vec{X})\right)$ es tal que $F_i(\vec{X})$ y $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$ con $i,j \in \{1,2,\ldots n\}$ son continuas en un conjunto A abierto y ***convexo***, entonces , la condición necesaria y suficiente para que $\vec{F}$ sea conservativo es que : $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$ en todo punto de dicho recinto.

Si n = 3, la igualdad de las derivadas cruzadas equivale a que $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ (Se lee: rotor de F igual al vector nulo)

El rotor se calcula como un producto vectorial:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} == \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z};\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z};\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

Para que el rotor sea nulo, deben ser nulas todas las componentes.
Un campo vectorial definido de R^3 en R^3 es conservativo si y sólo si es irrotacional.(tiene rotor nulo).

- ***Cálculo de la función potencial***

Supongamos que $\vec{F}:A \to R^2$ con $A \subseteq R^2$ / $\vec{F}(x;y) = \left(P(x;y);Q(x;y)\right)$ es un campo de gradientes. Interesa encontrar U(x;y) / : $U'_x = P(x;y)$ y $U'_y = Q(x;y)$.(*)

$U'_x(x;y) = P(x;y) \Rightarrow U(x;y) = \int P(x;y)dx + \varphi(y)$ (**), ya que al integrar respecto de x, la constante de integración es un número o una función que depende de sólo de y.

Derivamos (**) respecto de y e igualamos con (*):

$$Q(x;y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x;y)dx\right] + \varphi'(y) \Rightarrow \varphi'(y) = Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x;y)dx\right]$$

Resulta: $\varphi(y) = \int\left[Q(x;y) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x;y)dx\right]\right]dy + C$

Reemplazando en (**) se tiene:

$$\boxed{U(x;y) = \int P(x;y).dx + \int\left[Q(x;y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x;y)dx\right]\right]dy + C}$$

Observación: Para buscar la función potencial correspondiente a un campo de R^3 en R^3 , se procede de la misma forma pero debe integrarse tres veces. En la primera integración la constante es función de dos variables, en la segunda, una función que depende de una variable y en la tercera es un número.

INTEGRALES DE SUPERFICIE

1.- Algunos conceptos previos

1.1.- Interpretación geométrica de una transformación lineal de R^2 en R^3

Consideremos $\vec{T}:R^2 \to R^3 / \ \vec{T}(u;v) = \left(x(u;v);y(u;v);z(u;v)\right)$ una T.L. cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Como en una transformación lineal las rectas paralelas se transforman en rectas paralelas, el cuadrado de lado 1 en $\mathbf{R^2}$ se transforma en el paralelogramo construido sobre $\vec{T}(1;0) = \left(a_{11};a_{21};a_{31}\right)$ y $\vec{T}(0;1) = \left(a_{12};a_{22};a_{32}\right)$.

Esto significa que ***el área del cuadrado de lado 1 se transforma en la norma del producto vectorial entre*** $\vec{T}(1;0)$ ***y*** $\vec{T}(0;1)$**.**

1.2.- Superficies dadas paramétricamente.

1.2.1.- Definición:

Una ***<u>superficie parametrizada</u>*** es una función $:\vec{\phi}:D \to R^3$ con $D \subseteq R^2$. La superficie Σ es el conjunto imagen $\Sigma=\vec{\phi}(D)$

$$\vec{\phi}(u;v) = \left(x(u;v);y(u;v);z(u;v)\right)$$

Si $\vec{\phi} \in C^1$, es decir sus componentes tienen derivadas parciales continuas, se dice que Σ es una ***<u>superficie diferenciable o C^1</u>***

1.2.2.- Curvas coordenadas

Dada una superficie parametrizada $\vec{\phi}(u;v)$**,** se llaman ***curvas coordenadas*** a las que se obtienen al mantener constante uno de los parámetros .

Los vectores tangentes a las curvas coordenadas son los vectores derivados de $\vec{\phi}$, es decir : $\vec{\phi}\,'_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u};\frac{\partial y}{\partial u};\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ y $\vec{\phi}\,'_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v};\frac{\partial y}{\partial v};\frac{\partial z}{\partial v}\right)$

1.2.3.- Plano tangente

Consideremos una superficie dada por $\vec{\phi}(u;v)$ tal que $\vec{\phi}\,'_u$ y $\vec{\phi}\,'_v$ son tales que su producto vectorial no es el vector nulo (es decir, no son nulos ni paralelos), estos vectores generan el plano tangente a la superficie (ya que éste contiene a todas las rectas tangen-

tes a curvas sobre la superficie. Esto significa que un vector normal al plano tangente es perpendicular a ambos. Resulta: $\vec{N} = \vec{\phi}\,'_u \times \vec{\phi}\,'_v$

Resulta que la ecuación del plano tangente a la superficie Σ, imagen de $\vec{\phi}(u;v)$ en $P_0(x_0;y_0;z_0)$ es:

$$\boxed{\left(\vec{P} - \vec{P}_0\right) \cdot \left(\vec{\phi}\,'_u\left(u_0;v_0\right) \times \vec{\phi}\,'_v\left(u_0;v_0\right)\right) = 0}$$

Una superficie Σ imagen de $\vec{\phi}: A \to R^3$ con $A \subseteq R^2$ es regular si y sólo si $\vec{\phi} \in C^1 \wedge \vec{\phi}'_u \wedge \vec{\phi}'_v \neq \vec{0}, \forall (u;v) \in A$. Significa que tiene vector normal no nulo y continuo en todos sus puntos.

2.- Área de una superficie en R^3

Consideremos una superficie Σ, imagen de una función $\vec{\phi}: D \to R^3$ con $D \subseteq R^2$ que cumpla las siguientes condiciones:

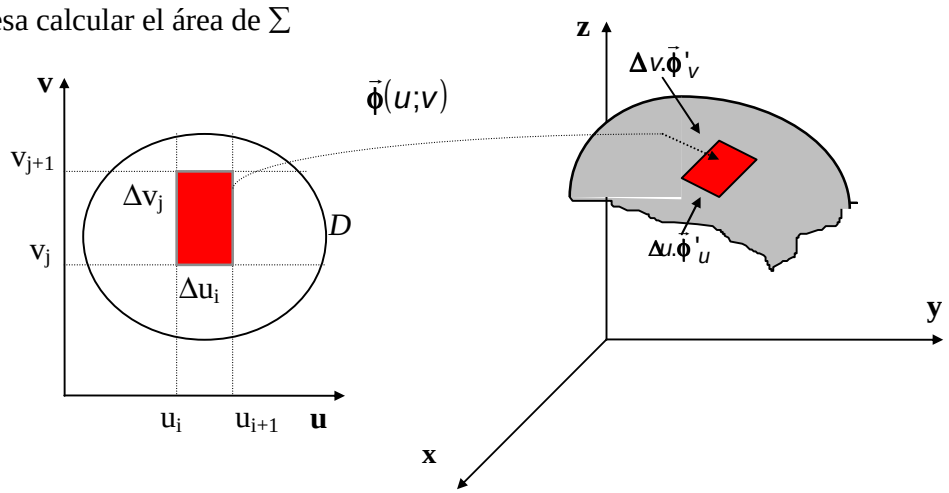
a) $\vec{\phi}$ es C^1,

b) $\vec{\phi}$ inyectiva en D, y

c) $\vec{\phi}\,'_u(u;v) \times \vec{\phi}\,'_v(u;v) \neq \vec{0}$ para todo $(u;v) \in D$, excepto en un número finito de puntos.

(Equivale a pedir que Σ sea suave en D, excepto en un número finito de puntos).

Interesa calcular el área de Σ



Provocamos una partición regular en D en rectángulos de área $\Delta u_i \Delta v_j$. Esta partición induce, mediante $\vec{\phi}(u;v)$, una partición en Σ en cuadriláteros curvilíneos $\Delta\Sigma_{ij}$, cuya área puede aproximarse por un paralelogramo sobre el plano tangente, trazado en un punto arbitrario $P_{ij} = \vec{\phi}\left(\alpha_i;\beta_j\right)$ con $u_i < \alpha_i < u_{i+1}$, $v_j < \beta_j < v_{j+1}$.

Es decir que estamos considerando, en realidad, la transformación del rectángulo de área $\Delta u_i \Delta v_j$ en un paralelogramo sobre el plano tangente a la superficie. Esto equivale a pensar en que se ha definido una transformación lineal que a la base canónica en el plano (u,v) le hace corresponder los vectores derivados $\vec{\phi}\,'_u$ y $\vec{\phi}\,'_v$ de $\mathbf{R}^3$ **.**

De acuerdo con la interpretación geométrica dada para las transformaciones lineales de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^3$, esto significa que al cuadrado de área 1 del plano (u;v), le asigna un cuadrilátero de área $\left\| \vec{\phi}\,'_u \times \vec{\phi}\,'_v \right\|$.

Por lo tanto, al rectángulo de área $\Delta u_i \Delta v_j$ le asigna como imagen un paralelogramo de área $\left\| \vec{\phi}\,'_u \times \vec{\phi}\,'_v \right\| \Delta u_i \Delta v_j$.

Resulta: área de $\Sigma = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} \left\| \vec{\phi}\,'_u\left(\alpha_i;\beta_j\right) \times \vec{\phi}\,'_v\left(\alpha_i;\beta_j\right) \right\| \Delta u_i . \Delta v_j$

Por definición de integral doble se tiene:

$$\boxed{\text{Área de } \Sigma = \iint_D \left\| \vec{\phi}\,'_u(u;v) \times \vec{\phi}\,'_v(u;v) \right\| du.dv}$$

Si Σ está definida en forma explícita por z= F(x;y) ,para todo (x;y) $\in$ A ,podemos pensar-la como una superficie parametrizada en la que $\begin{cases} u = x \\ v = y \end{cases}$

Luego la superficie es la imagen del campo vectorial
$\vec{\phi}: A \to R^3 \,/\, \vec{\phi}(x;y) = \left(x\,;y\,;\ F(x;y)\right)$, entonces

$$\text{Área de } \Sigma = \iint_A \left\| \vec{\phi}\,'_x(x;y) \times \vec{\phi}\,'_y(x;y) \right\| dx.dy \quad ,$$

siendo $\vec{\phi}\,'_x(x;y) = \left(1;0\,;F\,'_x(x;y)\right)$ y $\vec{\phi}\,'_y(x;y) = \left(0\,;1\,;F\,'_y(x;y)\right)$.

$$\vec{\phi}\,'_x(x;y) \times \vec{\phi}\,'_y(x;y) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & F'_x(x;y) \\ 0 & 1 & F'_y(x;y) \end{vmatrix} = -F\,'_x(x;y)\,\breve{i} - F\,'_y(x;y).\breve{j} + \breve{k}$$

$\left\| \vec{\phi}\,'_x(x;y) \times \vec{\phi}\,'_y(x;y) \right\| = \sqrt{1 + F\,'^2_x(x;y) + F\,'^2_y(x;y)}$, de donde resulta:

$$\boxed{\text{Área de } \Sigma = \iint_A \sqrt{1 + F'^2_x(x;y) + F'^2_y(x;y)}\ dx.dy}$$

Fórmulas similares a ésta pueden obtenerse si se tiene x= x(y;z) o y = y(x;z). En estos casos el recinto de integración se obtendrá proyectando la superficie sobre los planos (y,z) ó (x,z) respectivamente.

Por último, Σ puede estar definida implícitamente por G (x;y;z)=0. Si G (x;y;z)=0 define implícitamente a z = F(x;y) se tiene:

$$\sqrt{1+F'^2_x(x;y)+F'^2_y(x;y)}=\sqrt{1+\left(-\frac{G'_x}{G'_z}\right)^2+\left(-\frac{G'_y}{G'_z}\right)^2}=\sqrt{\frac{G'^2_z+G'^2_x+G'^2_y}{G'^2_z}}=\boxed{\frac{\left\|\vec{\nabla}G(x;y;z)\right\|}{\left|G'_z\right|}} \quad (1)$$

Pero teniendo en cuenta que el versor normal a la superficie está dado por:

$\breve{n}=\dfrac{\vec{\nabla}G(x;y;z)}{\left\|\vec{\nabla}G(x;y;z)\right\|}$ y que las componentes de un versor son sus cosenos directores, resulta que (1) es $\dfrac{1}{\left|\cos\left(\breve{n},\breve{k}\right)\right|}$

Entonces: $\boxed{\text{Área de } \Sigma = \iint_{D_{xy}} \frac{dx.dy}{\cos\left(\breve{n},\breve{k}\right)}}$ donde D_{xy} es la proyección de Σ sobre el plano(x,y)

Si se desea proyectar sobre el plano(x,z) es:

$\boxed{\text{Área de } \Sigma = \iint_{D_{xz}} \frac{dx.dz}{\cos\left(\breve{n},\breve{j}\right)}}$ donde D_{xz} es la proyección de Σ sobre el plano(x,z)

Si se desea proyectar sobre el plano(y,z) es:

$\boxed{\text{Área de } \Sigma = \iint_{D_{yz}} \frac{dy.dz}{\cos\left(\breve{n},\breve{i}\right)}}$ donde D_{yz} es la proyección de Σ sobre el plano(y,z)

<u>Observación</u>: Todas las fórmulas son válidas para superficies regulares a trozos, es decir superficie que son imágenes de campos vectoriales <u>inyectivos</u>, <u>pertenecientes a C^1</u> ,definidos de una unión de recintos simples de R^2 en R^3 . Estos campos constituyen una parametrización de la superficie. Debe cumplirse que al menos,respecto de una de esas parametrizaciones, <u>el vector normal resulte no nulo</u> en todo sus puntos excepto, a lo sumo, en un conjunto de medida nula.

3.- Integral de superficie de un campo escalar

Consideremos un campo escalar F: A $\rightarrow R^3$ continuo, y una superficie parametrizada Σ incluida en A, regular a trozos, imagen de $\vec{\phi}(u;v)$=(x(u;v);y(u;v);z(u;v)), definida en un conjunto $D \subseteq \mathbf{R^2}$.

Ya vimos que una partición regular de D provoca una partición en Σ . En cada uno de los cuadriláteros curvilíneos Σ_{ij} , elegimos un punto arbitrario P_{ij} = (x(α_{ij};β_{ij}); y(α_{ij};β_{ij});z(α_{ij};β_{ij})) y calculamos F(P_{ij})

Definición: $$\boxed{\iint_{\Sigma} F(x;y;z).d\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} F(\vec{P}_{ij}).\Delta\sigma_{ij}}$$

siendo $\Delta\sigma_{ij}$ el área del cuadrilátero curvilíneo que se corresponde con el rectángulo de área

$\Delta u_i \Delta v_j$ y $d\sigma$ la diferencial de área sobre Σ.

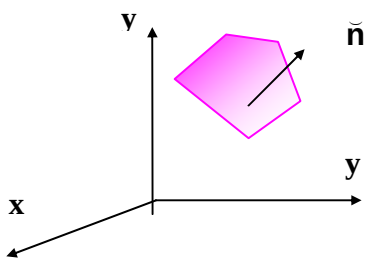
En consecuencia, el cálculo se hace de manera similar a la planteada para calcular áreas en R^3 , y la forma a utilizar dependerá de cómo se define la superficie y sobre qué plano se la proyecta. Como se reduce a una integral doble, una de las variables deberá expresarse en función de las otras dos, de acuerdo con la superficie sobre la que se integra.

4.- Integral de superficie de un campo vectorial.

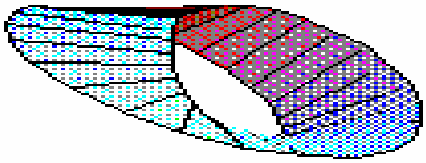
4.1.-Superficie orientada

4.1.1.- Superficies abiertas

Una superficie abierta orientada es una superficie con dos caras : una será exterior o positiva y la otra interior o negativa. Los versores normales asociados a ambas son opuestos.

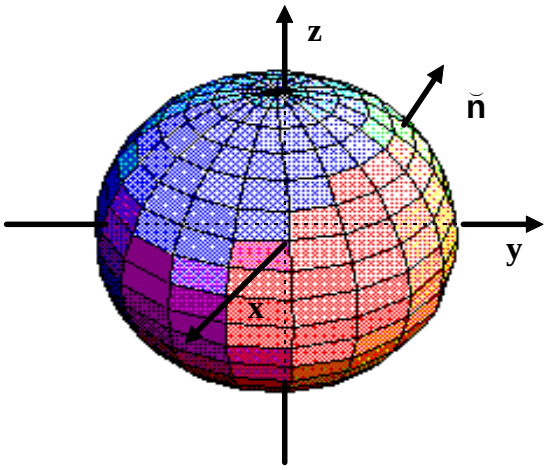


Hablar de dos caras , supone la existencia de superficies abiertas de una sola cara. En efecto, un ejemplo de tales superficies es la conocida como cinta de Möebius. Esta cinta puede recorrerse totalmente sin atravesar ningún borde



4.1.2. Superficies cerradas

Se considera cara positiva a la exterior. En general, el versor asociado se reconoce por el ángulo que forma con alguno de los planos coordenados.



4.2 Flujo de un campo vectorial a través de una superficie.

Consideremos un campo vectorial continuo $\vec{F}: A \to R^3$, con $A \subseteq R^3$ y una superficie $\sum$, incluida en A, simple, regular a trozos, orientable.

Se llama ***flujo de*** $\vec{F}$ ***a través de*** Σ a la integral de superficie de la componente de $\vec{F}$ normal a la superficie.

$$\boxed{\phi = \iint_{\Sigma} \left(\vec{F}(x;y;z) \cdot \breve{n} \right) . d\sigma}$$

4.2 Flujo de un campo vectorial a través de una superficie.

Consideremos un campo vectorial continuo $\vec{F}:A \to R^3$, con $A \subseteq R^3$ y una superficie Σ, incluida en A, simple, regular a trozos, orientable.

Se llama ***flujo de $\vec{F}$ a través de Σ*** a la integral de superficie de la componente de $\vec{F}$ normal a la superficie.

$$\boxed{\phi = \iint_{\Sigma} \left(\vec{F}(x;y;z) \cdot \breve{n}\right).d\sigma}$$

.

TEOREMA DE GAUSS- GREEN

Si $\vec{F}:A \to R^2$ con $A \subseteq R^2$ / $\vec{F}(x;y) = (P(x;y); Q(x;y))$ es un campo vectorial continuo, lo mismo que $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sobre un recinto R $\subseteq$ A ,simple limitado por una curva regular cerrada $\mathcal{C}$ simple, asociada a $\vec{r}:[a,b] \to R^2$ orientada en sentido antihorario , resulta :

$$\oint_{C^+} (P(x;y)dx + Q(x;y)dy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Demostración:

Sea R un recinto limitado por una curva cerrada y simple tal que una paralela a uno de los ejes no la corte en más de dos puntos.

La curva puede pensarse como unión de dos arcos:

$\mathcal{C} = \overset{\frown}{ABC} \cup \overset{\frown}{CDA}$ (respecto de x) , o bien $\mathcal{C} = \overset{\frown}{DAB} \cup \overset{\frown}{BCD}$ (respecto de y)

Las ecuaciones de estos arcos son:

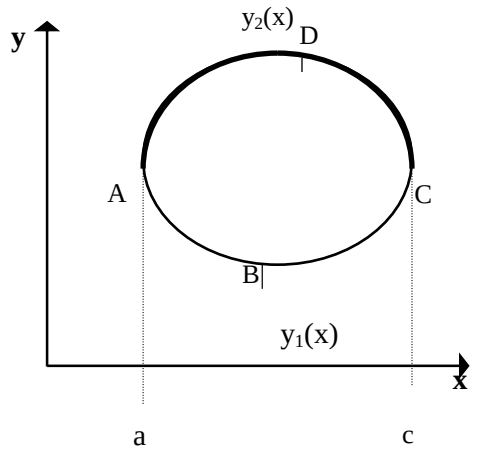
$\overset{\frown}{ABC}$ $y = y_1(x)$

$a < x < c$

(Tomando x como parámetro)

$\overset{\frown}{CDA}$ $y = y_2(x)$

$c \geq x \geq a$

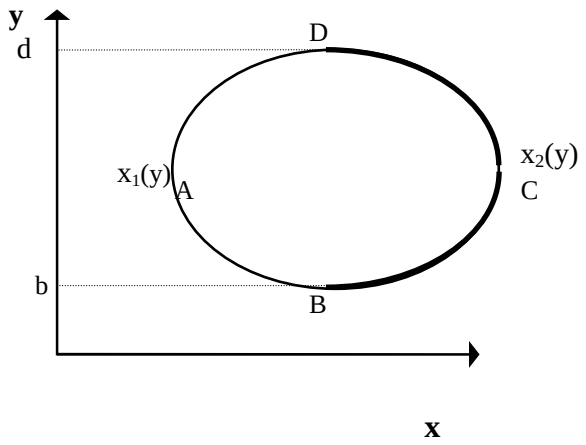


Si se toma y como parámetro es:

$\overset{\frown}{DAB}$ $x = x_1(y)$
$d \geq y \geq b$

$\overset{\frown}{BCD}$ $x = x_2(y)$

$b < y < d$



Para demostrarlo, partiremos del segundo miembro de la tesis:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy =$$

$$= \int_b^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx - \int_a^c dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} =$$

$$= \int_b^d [Q(x_2(y); y) - Q(x_1(y); y)]\, dy - \int_a^c [P(x; y_2(x)) - P(x; y_1(x))]\, dx =$$

$$= \int_b^d Q(x_2(y); y)\, dy + \int_d^b Q(x_1(y); y)\, dy + \int_c^a P(x; y_2(x))\, dx + \int_a^c P(x; y_1(x))]\, dx =$$

$$= \int_{BCD} Q(x; y)\, dy + \int_{DAB} Q(x; y)\, dy + \int_{CDA} P(x; y)\, dx + \int_{ABC} P(x; y)\, dx =$$

$$= \oint_C P(x: y)\, dx + \oint_C Q(x; y)\, dy = \int_C [P(x; y)\, dx + Q(x; y)\, dy]$$

OBSERVACIÓN: Si el recinto no cumple con la condición de que cualquier paralela a los ejes corta a su contorno sólo en dos puntos, se puede descomponer en un número finito de recintos que cumplan la mencionada condición y aplicar el teorema de Gauss-Green en cada uno de ellos. y sumar los resultados parciales.

Cálculo de áreas planas mediante integrales curvilíneas

Por el Teorema de Gauss-Green si R es un recinto limitado por una curva regular cerrada C y bajo ciertas hipótesis de continuidad se cumple que:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_C (P(x; y)dx + Q(x; y)dy)$$

Pero : $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \Rightarrow \iint_R dx\, dy =$ área de R ; por lo tanto cualquier par de funciones P(x;y) y Q(x;y) que verifiquen $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, permitirán calcular el área de R con $\oint_C (P(x;y)dx + Q(x;y)dy)$

Por ejemplo:

I.- Si P(x;y) = 0 y Q(x;y) = x, resulta área de R = $\oint_C x\, dy$

II.- Si P(x;y) = -y y Q(x;y) = 0 , resulta área de R = $\oint_C -y\, dx$

III.- Sumando miembro a miembro las dos expresiones anteriores se obtiene:

2 área de R = $\oint_C x\, dy$ - $\oint_C y\, dx$ de donde:

$$\boxed{\text{área de R} = \frac{1}{2}\oint_C (x\, dy - y\, dx)}$$

Operador vectorial nabla

Funciona como un vector. Se define mediante: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\breve{i} + \frac{\partial}{\partial y}\breve{j} + \frac{\partial}{\partial z}\breve{k}$

Un vector puede multiplicarse por un escalar, multiplicarse escalarmente por otro vector o multiplicarse vectorialmente por otro vector.

Por lo tanto, el operador nabla puede:

a) aplicarse a un campo escalar (gradiente)

$$\boxed{\vec{\nabla}\varphi(x;y;z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\breve{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\breve{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\breve{k}}$$

El resultado es un campo vectorial.

b) Multiplicarse escalarmente por un campo vectorial (**divergencia)**

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{F}(x;y;z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}}$$

El resultado es un campo escalar

c) multiplicarse vectorialmente por un campo vectorial (**rotor)**

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}(x;y;z) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\breve{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\breve{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\breve{k}$$

El resultado es un campo vectorial

I.-Divergencia de un campo vectorial

I.1.-Definición:

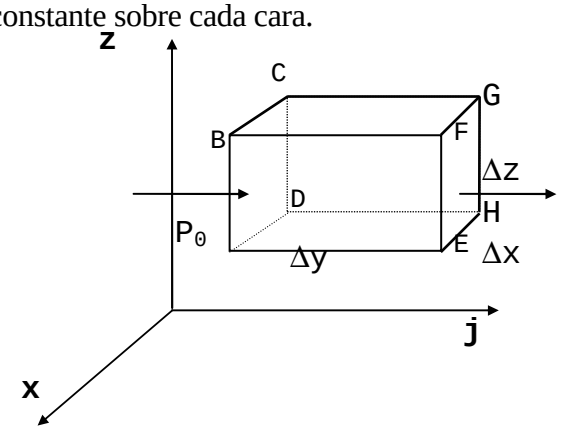
Si F(x;y;z) = F_1(x;y;z) **i** + F_2(x;y;z) **j** + F_3(x;y;z) **k**.es un campo vectorial con derivadas parciales finitas, definido de A en $\mathbf{R}^3$, con A $\subseteq \mathbf{R}^3$, se llama **divergencia de F** en un punto P_o de su dominio a:

$$\vec{\nabla}.\vec{F}(x;y;z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

I.2-Interpretación fisica:

Consideremos un campo vectorial $\vec{F} = \delta\vec{v}$ en el que δ representa la densidad de un fluido y $\vec{v}$ su velocidad.. Entonces el campo expresa la masa del fluido por unidad de área y de tiempo.

Tomemos, en el dominio de $\vec{F}$, un prisma recto rectángulo con vértice en $P_o(x_o;y_o;z_o)$ y aristas, Δx, Δy, y Δz. Si $\vec{F}$ es continuo y las caras del prisma suficientemente pequeñas, se puede pensar $\vec{F}$ constante sobre cada cara.



En la dirección y sentido de **j**, la diferencia entre la masa de fluido que sale por la cara EFGH y la que entra por P_oBCD es:

$$\Delta_y z.\Delta x.\Delta z = [F_2(x_0;y_0+\Delta y;z_0) - F_2(x_0;y_0;z_0)]\Delta x.\Delta z$$

Si dividimos por el volumen del prisma $\Delta x\Delta y\Delta z$, y tomamos límite para $(\Delta x;\Delta y;\Delta z)$ tendiendo a (0;0;0), obtendremos, puntualmente, **la variación de masa por unidad de tiempo y de volumen,** en la dirección y sentido de **j**.

$$\lim_{(\Delta x;\Delta y;\Delta z)\to(0;0;0} \frac{\Delta_y F_2.\Delta x.\Delta z}{\Delta x.\Delta y.\Delta z} = \left.\frac{\partial F_2}{\partial y}\right]_{\vec{P}_0}$$

Pero, si hacemos el mismo razonamiento en la dirección y sentido de **i** y de **k**, tenemos que:

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{F}\,]_{P_o} = \frac{\partial F_1}{\partial x}\,]_{P_o} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\,]_{P_o} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\,]_{P_o}}$$

mide ***la variación total de masa de fluido en P_o por unidad de tiempo y volumen.***

Si div **F** > 0 , en P_o hay una ***fuente o un manantial***, donde se genera fluido ; en cambio, si div **F** < 0 , en P_o hay un ***pozo o un sumidero*** donde se pierde fluido.

I.*3.- Teorema de la divergencia (Gauss -Ostrogradsky)*

I.*3.1.- Enunciado*

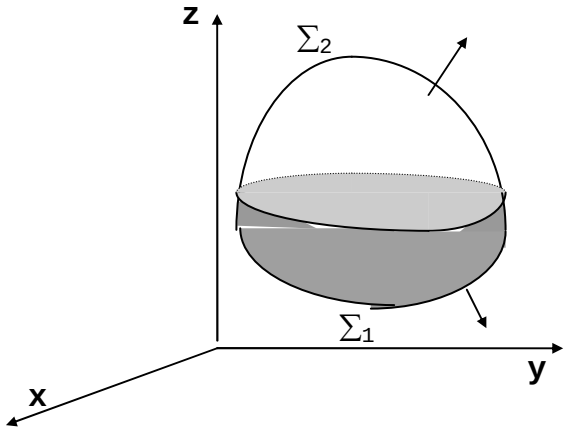
Consideremos un campo vectorial $\vec{F}: A \to R^3 / A \subseteq R^3$, con derivadas parciales continuas en un sólido simple V, proyectable sobre los tres planos coordenados y limitado por una superficie cerrada orientable Σ que admita en todos sus puntos versor normal que

varíe con continuidad, entonces el flujo de $\vec{F}$ a través de $\sum$, en la dirección y sentido del versor normal exterior, es igual a la integral de volumen de la divergencia de $\vec{F}$ sobre V .

$$\boxed{\iint_{\Sigma} \vec{F} \cdot \breve{n}\, d\sigma = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dV}$$

I.3.2.-Interpretación fisica:

De acuerdo con las interpretaciones dadas para flujo y divergencia, podemos observar que el primer miembro representa la diferencia entre el flujo que atraviesa $\sum_2$ y el que entra por $\sum_1$ que, obviamente debe coincidir con la variación de masa de fluido por unidad de tiempo, que se produce en V y que está dado por el segundo miembro de la tesis.



<u>II.-Rotor de un campo vectorial</u>

Ii.1.-Definición:

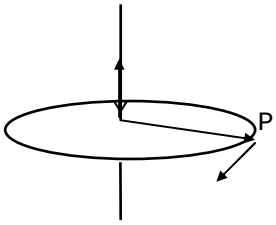
Si F(x;y;z) = F_1(x;y;z) **i** + F_2(x;y;z) **j** + F_3(x;y;z) **k**.es un campo vectorial con derivadas parciales finitas, definido de A en $\mathbf{R}^3$, con A $\subseteq \mathbf{R}^3$, se llama **rotor de F** en un punto P_o de su dominio a: $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ (P_0)
Es decir:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(x;y;z) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\breve{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\breve{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\breve{k}$$

II. 2.- Interpretación física:

El rotor de un campo se vincula con el movimiento de rotación que produce. En efecto, si consideramos un cuerpo rígido que gira en torno a un eje, el movimiento se describe mediante el vector $\vec{w}$ (velocidad angular) que tiene la dirección del eje de rotación y

verifica que, para todo punto P del cuerpo que: **w = r x v** donde **r** es el vector posición de P y **v** el vector velocidad tangencial.



Por propiedad del producto vectorial, resulta **v = w x r**
Si consideramos que el cuerpo gira en torno al eje z, es
w = *w* **k** ; **r**= x **i** + y **j** + z **k** , por lo tanto:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 0 & 0 & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = -wy\breve{i} + wx\breve{j}$$

Resulta

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -wy & +wx & 0 \end{vmatrix} = (w + w)\breve{k} = 2w\breve{k}$$

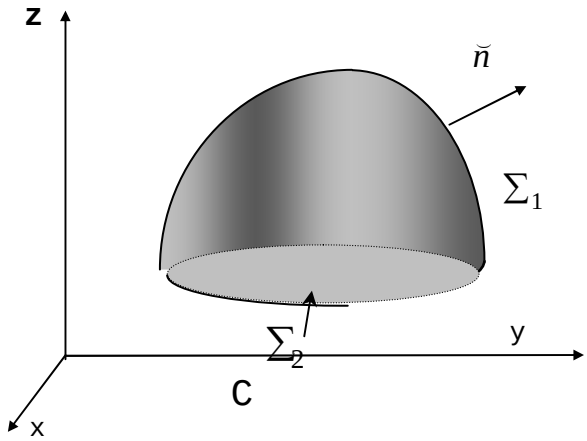
Es decir, que en la rotación de un cuerpo rígido, el rotor del campo de velocidades tangenciales es el doble del vector velocidad angular.

Cuando el rotor de un campo es nulo , significa que no produce rotaciones, es ***irrotacional.***
Ya demostramos que los campos de gradientes son irrotacionales.

II.3.- Teorema del rotor (o de Stokes)

Sea un campo vectorial $\vec{F}: A \to R^3$, con $A \subseteq R^3$, con derivadas parciales continuas, y sea $\sum$ una superficie abierta orientable, imagen de un campo vectorial $\vec{\varphi}: B \to A$ con derivadas parciales continuas y no simultáneamentes nulas, limitada por una curva regular cerrada C , entonces la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de C en sentido antihorario, es igual al flujo del rotor de $\vec{F}$ a través de $\sum$ considerando las normales apuntando hacia fuera.

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\sum} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \breve{n} \; . d\sigma}$$



Consecuencia: Consideremos un campo vectorial continuo y dos superficies abiertas, orientables, regulares, incluidas en su dominio, limitadas por la misma curva regular cerrada C. De acuerdo con el Teorema del rotor, el flujo del rotor a través de cualquiera de las dos superficies , en el sentido de la normal exterior ,es el mismo, ya que en ambos casos el flujo es igual a la circulación

ECUACIONES DIFERENCIALES

I.- Definición:

Una ecuación diferencial es una ecuación que establece una relación entre las variables independientes, una función y sus derivadas.

Si la función buscada depende de una variables (es del tipo y = f(x)), la ecuación se llama **ordinaria**. Si la derivada de mayor orden que aparece es de orden **"n"** , se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria de orden n**.

En símbolos: $F(x;y;y';y'';...;y^{(n)}) = 0$

Si la función buscada depende de más variables, se llama **ecuación diferencial a derivadas parciales**.

(Ecuación a derivadas parciales de 2do orden) *Por ejemplo:* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

Si la ecuación diferencial se escribe como un polinomio respecto de las derivadas, llamamos **grado** de la ecuación diferencial, al mayor exponente que afecta a la derivada que da el orden a la ecuación.

Ejemplo: $(y''')^5 - (y'')^4 . x = e^x$ (ecuación diferencial ordinaria de 3er orden ,5to grado.

En cambio, $2^{y''} + y''' = 0$ no tiene grado

II.- Soluciones de una ecuación diferencial:

Toda función y = f(x) que reemplazada en la ecuación diferencial, la transforma en una identidad, es solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo: y' = y (1);
$f(x)=e^x$ la verifica, por lo tanto $f(x)=e^x$ es solución de (1), pero también la verifica $f(x) = 2e^x$.

En general: $f(x)= C.e^x$ satisface la ecuación (1).

La familia de curvas $y = C.e^x$ es la **solución general** de (1). (Abreviaremos S.G.)

Se llama S.G de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden a la familia de funciones f(x;C), que depende de una constante arbitraria C (**parámetro)** y satisface las siguientes condiciones:
a) Para todo C, se satisface la ecuación diferencial;

b) Si se da una condición inicial , es decir un punto por el que se pretende pase la curva solución (por ejemplo, $y(x_o)= y_o$), se puede hallar $C = C_o$ /$y =f(x; C_o)$ verifica la ecuación diferencial y la condición inicial.

La solución $y =f(x; C_o)$ es una **solución particular** (S.P) de la ecuación diferencial planteada.
Si la ecuación diferencial es de orden "n", las soluciones generales dependen de n parámetros, que son constantes arbitrarias, independientes; es decir, no pueden reducirse.

- ***Solución particular*** es aquella que se deduce de la general determinando el valor de él o los parámetros; sujetas a ciertas condiciones iniciales, previamente establecidas.

- A veces existen soluciones que verifican la ecuación diferencial , pero no pertenecen a la SG, de la misma, se llaman ***soluciones singulares*** (SS)

Ejemplo:
$y = x\, y'' - y'^2$. Para resolverla podemos hacer $y' = u$ (1) ;

se tiene $y = x.\, u - u^2$ (*); entonces : $y'= u + u'.x - 2u.\, u'$ (2)

Igualando (1) y (2): $u = u + u' (x - 2.u) \Rightarrow$ $u' (x - 2\, u) = 0 \Rightarrow$ $u'= 0 \vee x = 2u$

$u' = 0 \Rightarrow u = C$ $\Rightarrow$ reemplazando en (*): $y = C.x - C^2$ SG

$u = x/2 \Rightarrow$ $y = x^2/2 - x^2/4$ $\Rightarrow$ $y = x^2/4$ S.S

III.- Obtención de la ecuación diferencial de una familia de curvas:

Dada la ecuación **finita** una flia. de curvas dependiente de uno o más parámetros, interesa encontrar su ecuación diferencial. Para ello se deriva tantas veces como parámetros aparezcan y se opera hasta eliminarlos de la expresión.

Por ejemplo:
a)Hallar la ecuación diferencial de la flia. de rectas que pasan por el origen; la ecuación finita es

$y = m\, x$ (donde m es el parámetro).

Derivamos ambos miembros: $y' = m$.

Reemplazando se obtiene la ecuación diferencial del haz de rectas: $y = y'.x$

IV. Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden:

IV.1- Variables separables

Es el más sencillo; sirve para resolver ecuaciones diferenciales que pueden llevarse a la forma:

$$f_1(x).\, g_1(y)\, dx + f_2(x).\, g_2(y)\, dy=0$$

$$f_1(x).g_1(y).dx = -f_2(x).g_2(y).dy \Rightarrow \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy \Rightarrow \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy$$

Ejemplo: $: y' = \dfrac{x+1}{y^4+1} \Rightarrow (y^4+1)dy = (x+1)dx \Rightarrow \int \left(y^4+1\right)dy = \int (x+1)dx \Rightarrow$

$\boxed{\dfrac{y^5}{5} + y = \dfrac{x^2}{2} + x + C}$ S.G.

<u>IV.2.- Ecuaciones diferenciales homogéneas</u>

IV.2.1) Función homogénea de grado **n**

F: A$\rightarrow$**R** con A$\subseteq$ $\mathbf{R^2}$ es homogénea de grado "n" si y sólo si $\forall$ t ε **R** : F(t x;t y)= t^n F(x;y).

Ejemplos: i) $F(x;y) = x^3 + x^2y$ es homogénea de grado 3 ya que

$F(t\,x;t\,y)=t^3.x^3 + t^2.x^2.t.y= t^3.x^3 + t^3.x^2.\, y= t^3.(x^3+ x^2.y)= t^3.F(x;y)$

ii) $F(x;y)= e^{x/y}$ es homogénea de grado 0 pues

$F(t\,x;t\,y) = e^{tx/t\,y} = e^{x/y}= t^0.\, F(x;y)$

<u>IV.2.2.-</u> *<u>Propiedad:</u>*

Las funciones homogéneas de grado 0 pueden escribirse en función de y/x.

En efecto: F(x;y) homogénea de grado 0 $\Rightarrow$ F(tx;ty) = F(x;y), $\forall$ t

Si t = 1/x, se tiene $F\left(\frac{1}{x}.x;\frac{1}{x}.y\right)$ = F(x;y)

G(y/x) = F(x;y)

IV.2.3.- *Ecuación diferencial ordinaria de primer orden homogénea*

Se llama así a aquella ecuación diferencial que puede escribirse como:

y' = F(x;y) siendo F(x;y) homogénea de grado 0

Por la propiedad anterior: y' = $G\left(\frac{y}{x}\right)$(*)

Se transforma en una ecuación a variables separables mediante la sustitución: $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = z.x \Rightarrow y' = z'x + z$

Reemplazando en (*) : z'. x + z = G(z) $\Rightarrow$

$$\frac{dz}{dx} \cdot x + z = G(z) \Rightarrow \frac{dz}{dx} \cdot x = G(z) - z \Rightarrow \int \frac{dz}{G(z) - z} = \int \frac{dx}{x}$$

Resulta: $\ln|x| = \int \frac{dz}{G(z) - z} \Rightarrow \boxed{x = e^{\int \frac{dz}{G(z) - z}}}$ S.G

<u>NOTA</u>: G(z) - z = 0 puede dar lugar a soluciones singulares.

Ejemplo: y ’ xy = $x^2 + 2y^2$

$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} \Rightarrow y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ Haciendo la sustitución y = z.x , y reemplazando y’ se tiene:

$$z'x + z = \frac{1}{z} + z \Rightarrow z'x = \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{dz}{dx}x = \frac{1}{z} \Rightarrow z.dz = \frac{dx}{x}. \Rightarrow \int z.dz = \int \frac{dx}{x}$$

Resulta: $\frac{1}{2}z^2 = \ln Cx$. Reemplazando : $\frac{y^2}{2x^2} = \ln CX \Rightarrow \boxed{y^2 = 2x^2 \ln Cx}$ S.G

IV.3.-*Ecuaciones diferenciales lineales*

Responden a la forma: y' + P(x).y = Q(x) (*)

Si Q(x) = 0 se lleva a variables separables:

$u' + P(x) \,.\, u = 0 \qquad (**)$

$$\frac{du}{dx} = -P(x).u \Rightarrow \frac{du}{u} = -P(x).dx \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\int P(x)dx$$

$$\Rightarrow \ln|u| = -\int P(x)dx \Rightarrow u = e^{-\int P(x)dx}$$

Para resolver (*) se utiliza la denominada sustitución de Lagrange que consiste en hacer **y = u. v** donde **u** es <u>una</u> solución particular de (**)

y = u. v $\Rightarrow$ y' = u'. v + u . v'

En (*): u'. v + u . v'+ P(x). u . v = Q(x)

u. v' + v.[u' + P(x). u] = Q(x)

Si $u = e^{-\int P(x)dx}$, la expresión entre corchetes es 0 y resulta:

$$e^{-\int P(x)dx}.\frac{dv}{dx} = Q(x) \Rightarrow dv = \int Q(x).e^{\int P(x)dx}.dx + C$$

Entonces: $y = u.v \Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x).e^{\int P(x)dx}.dx + C\right]$

Ejemplo: y'+ 2y = 4x

Buscamos u/ u'+ 2 u = 0 $\Rightarrow$

$$u' = -2u \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2u \Rightarrow \frac{du}{u} = -2.dx \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -2\int dx \Rightarrow \ln|u| = -2x$$

$$\Rightarrow u = e^{-2x}$$

Hacemos la sustitución ***y = u. v*** con $u = e^{-2x}$

y'= u'v + u v ' *, entonces:* ***u'v + u v ' + 2 u v = 4x***

$$u\,v' + \underbrace{u(v' + 2v)}_{0} = 4x$$

$$e^{-2x}\frac{dv}{dx} = 4x \Rightarrow v = \int 4xe^{2x}dx \Rightarrow v = (2x-1).e^{2x} + C$$

120

Resulta $y = e^{-2x}\,[(2x-1).e^{2x} + C] \Rightarrow \boxed{y = C.e^{-2x} + 2x-1}$

IV.4.- Ecuaciones diferenciales totales exactas

Son del tipo :

$$P(x;y)dx + Q(x;y)\,dy = 0 \quad (1)$$

siendo el primer miembro una expresión tal que se pueda asegurar la existencia de una función U(x;y)/dU(x;y)=P(x;y) dx + Q(x;y)dy (U(x;y) es la función potencial)
(Para reconocerlas recordar la condición necesaria y suficiente para que un campo de vectorial sea de gradientes.)

Se busca, con el procedimiento habitual, la función potencial y se reemplaza en el primer miembro:

$$dU(x;y) = 0 \Rightarrow U(x;y) = C \quad \text{S.G de (1)}$$

<u>IMPORTANTE</u>: La función potencial es un campo escalar de dos variables y lo que se busca es una flia. de funciones escalares de una variable , que son las curvas de nivel de la función potencial. **Es un gravísimo error de concepto dar como solución general de (1)** U(x;y).

Ejemplo:
(cos y + y. cos x).dx = (x.sen y - sen x) dy ,que puede escribirse:

$$\underbrace{(\cos y + y.\cos x)}_{P(x;y)}.dx + \underbrace{(\text{sen } x - x.\text{sen } y)}_{Q(x;y)}\,dy = 0$$

Es una ecuación diferencial total exacta, ya que $P'_y = Q'_x$, siendo todas las funciones involucradas , continuas al igual que sus derivadas

En efecto: $P'_y = -\text{ sen } y + \cos x$; $Q'_x = \cos x - \text{sen } y$

Buscamos la función potencial U(x;y)/ $U'_x = \cos y + y\,.\cos x$
$U'_y = \text{sen } x - x\,.\text{ sen } y$ (*))/

$$U(x;y) = \int \frac{\partial U}{\partial x}.dx = \int(\cos y + y\cos x)dx$$

Resulta: $U(x;y) = x\cos y + y\,\text{sen } x + \varphi(y)$

Derivando respecto de "y" e igualando con (*), se tiene:
$-x\,\text{sen } y + \text{sen } x + \varphi'(y) = \text{sen } x - x\,\text{sen } y \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C$

Luego es: $U(x;y) = x\cos y + y\,\text{sen}\,x + C \Rightarrow$ la S.G. de la ec. dif es $\boxed{x\cos y + y\,\text{sen}\,x + c = 0}$

V.5.--*Ecuaciones que se reducen a diferenciales totales exactas*

Consideremos una ecuación del tipo:

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = 0$$

que **no** sea diferencial total exacta, es decir $P'_y \neq Q'_x$.

Como si multiplicamos ambos miembros de una igualdad por una misma expresión obtenemos otra igualdad, buscaremos un **factor integrante** que llamaremos $\mu(x;y)$, que transforme el primer miembro de la ecuación en una expresión diferencial total exacta.

Es decir, queremos encontrar $\mu(x;y)$/ (*) $\mu(x;y)\,P(x;y)\,dx + \mu(x;y).Q(x;y)\,dy = 0$ sea ecuación diferencial total exacta.

$$\frac{\partial(\mu(x;y)P(x;y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x;y).Q(x;y))}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\mu(x;y)}{\partial y}P(x;y) + \mu(x;y)\frac{\partial P(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial\mu(x;y)}{\partial x}.Q(x;y) + \mu(x;y)\frac{\partial Q(x;y)}{\partial x}$$

Ha quedado expresada una ecuación diferencial a derivadas parciales; es decir, con lo que sabemos sólo podremos resolverla si μ es función de una sola variable, o sea si existe $\mu(x)$ o $\mu(y)$ que transforme la ecuación dada en diferencial total exacta.

Veamos bajo que condiciones existe $\mu(x)$:

Si $\exists\mu = \mu(x)$

$$\mu(x).\frac{\partial P(x;y)}{\partial y} = \mu'(x).Q(x;y) + \mu(x).\frac{\partial Q(x;y)}{\partial x} \Rightarrow \mu(x).\left[P'_y - Q'_x\right] = \frac{d\mu}{dx}Q(x;y)$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}dx$$

Podremos encontrar $\mu(x)$ sólo si $\dfrac{P'_y - Q_x'}{Q}$ sólo depende de x, entonces

Integrando ambos miembros resulta : $\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{\frac{\partial P(x;y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x;y)}{\partial x}}{Q(X;y)}.dx$

$$\Rightarrow \ln|\mu| = \int (\frac{P'_y - Q'_x}{Q})dx \Rightarrow \mu = e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}dx}$$

Si esto se verifica, se reemplaza μ en (*) por una de las soluciones obtenidas y se resuelve la ecuación como ecuación diferencial total exacta.

En caso de no existir μ(x), se puede razonar de la misma forma para ver si existe μ(y). En este caso, obtendremos que para que exista μ(y), debe cumplirse que:

$$\frac{\partial[\mu(y).P(x;y)}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \mu'.P + \mu P'_y = \mu.Q'_x \Rightarrow \frac{d\mu}{dx}P = \mu\left(Q'_x - P'_y\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{Q'_x - P'_y}{P}dx$$

Debe ser función de "y"

En este caso el factor integrante μ(y) se obtiene resolviendo

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{\frac{\partial Q(x;y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x;y)}{\partial y}}{P(X;y)}.dy$$

y es:

$$\mu = e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P}}$$

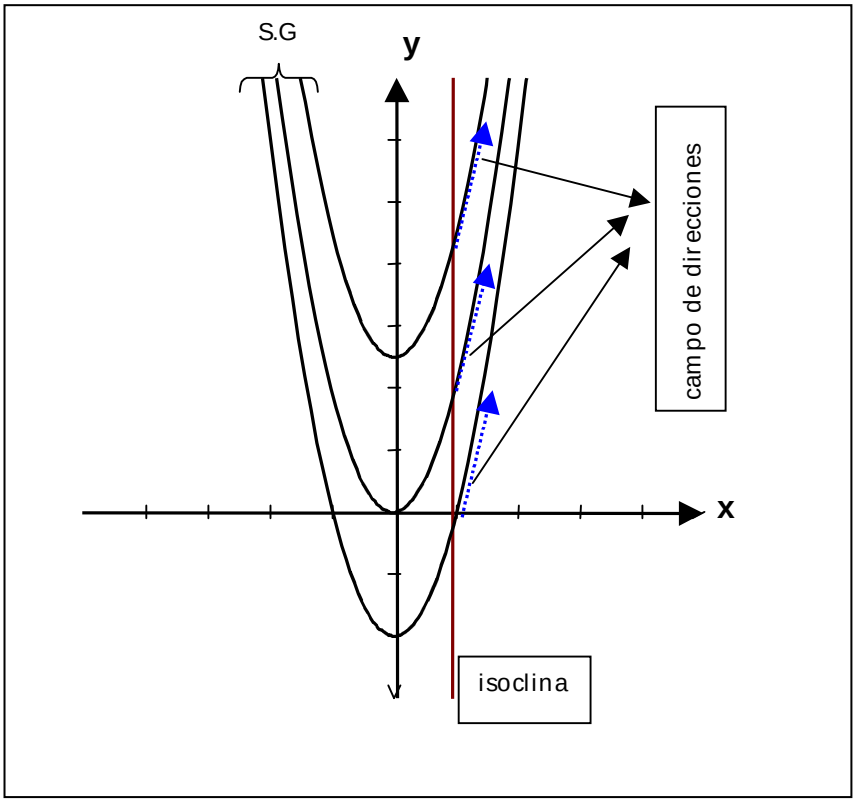
De la misma forma que en el caso anterior, se reemplaza en (*)μ por la expresión obtenida y se resuelve como una ecuación diferencial total exacta.

V.- ***Interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.***

Un ejemplo:

Consideremos la ecuación diferencial y'= 2x. Su solución general es : $y = x^2 + C$. Para cada punto del plano la ecuación diferencia define un campo vectorial $\vec{t} = (1;2x)$ que es

tangente a la curva de la familia que pasa por ese punto. Las curvas 2x = k unen los puntos de las distintas curvas de la S.G. que admiten tangentes paralelas.



$\vec{t}$ define un **campo de direcciones** tangente a las curvas que constituyen la solución general de la ecuación diferencial.
Isoclinas (igual inclinación): son curvas que unen los puntos en los que las distintas curvas de la S.G. tienen tangentes paralelas.

En general:
Dada la ecuación y'= f(x;y), el campo vectorial $\vec{t} = (1; f(x; y))$ define un **campo de direcciones** que es tangente, en cada punto, a una curva de la S.G.

Las curvas f(x;y)= k son las **isoclinas** , es decir las curvas que unen los puntos en los que el campo tiene la misma dirección.

Otro ejemplo:

124

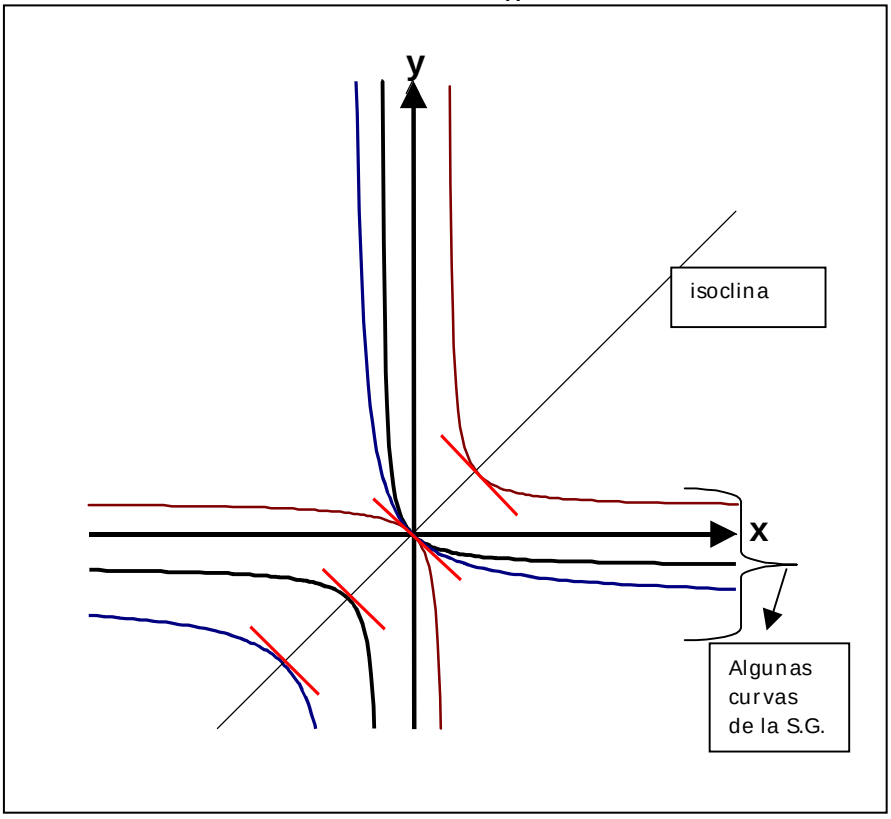
$y^2 + x^2 \cdot y' = 0 \Rightarrow$

$$y' = -\frac{y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = -\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int -\frac{dx}{x^2} \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + C$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1 + Cx}{x} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-x}{1 + Cx} \quad (S.G)}$$

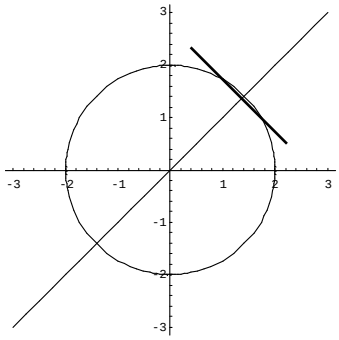
El campo de direcciones está dado por: $\vec{t} = \left(1; -\frac{y^2}{x^2}\right)$

Las isoclinas responden a ecuaciones del tipo: $-\frac{y^2}{x^2} = cte \Rightarrow y^2 - kx^2 = 0$



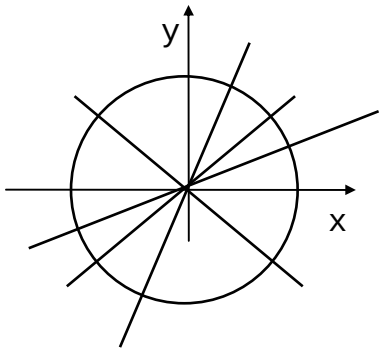
VI.-Trayectorias ortogonales

1.- Una curva es ortogonal a otra si y sólo si la corta y en el punto de intersección las rectas tangentes son perpendiculares. Ejemplo: La circunferencia *C* es ortogonal a la recta r



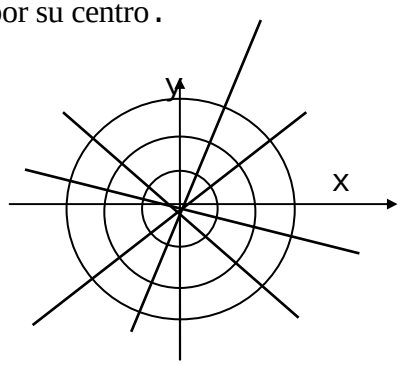
2.- Una curva es trayectoria ortogonal a una flia. de curvas si y sólo si es ortogonal a todas las curva de la flia .

Ejemplo: La circunferencia *C* es ortogonal a la flia de rectas que pasan por su centro.



3.- Una familia de curvas constituyen las trayectorias ortogonales de otra si y sólo si cada curva de la primera es ortogonal a cada curva de la segunda.

Ejemplo: El conjunto de circunferencias con centro O es la familia de ***trayectorias ortogonales*** del conjunto de rectas que pasan por su centro.



Para hallar la ecuación finita de la flia. de trayectorias ortogonales:

a)Si se conoce la ecuación finita de una familia de curvas, por derivación puede eliminarse el parámetro y obtener la ecuación diferencial que caracteriza a la familia dada. F(x;y;y') = 0

En el ejemplo: La ecuación del haz de rectas es y = mx.

Derivando, se obtiene: y ' = m; es decir y = y'.x

b) Como el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a -1, para hallar la ecuación diferencial de la familia de trayectorias ortogonales, en la ecuación diferencial obtenida en a), se reemplaza y' por -1/y'.

$$F(x'y'-1/y')=0$$

En el ejemplo: $y = (-1/y').x$

c) Finalmente, para hallar la ecuación finita de la familia. de trayectorias ortogonales hay que resolver la ecuación planteada en b)

$$y = (-1/y').x \Rightarrow y'.y = -x \Rightarrow y.dy = -x.dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$y^2 + x^2 = 2C$$

<u>Trayectorias ortogonales en coordenadas polares</u>

Si una curva está dada en coordenadas polares por una expresión del tipo: $\rho = \rho_1(\varphi)$, puede pensarse como el conjunto imagen de una función vectorial
$\vec{x}_1(\varphi) = (\rho_1(\varphi).\cos\varphi; \rho_1(\varphi).\operatorname{sen}\varphi)$
Su vector tangente es, por lo tanto, su vector derivado:

$$\vec{x}\,'_1(\varphi) = (\rho'_1(\varphi).\cos\varphi - \rho_1(\varphi).\operatorname{sen}\varphi; \rho'_1(\varphi).\operatorname{sen}\varphi + \rho_1(\varphi).\cos\varphi)$$

Si una curva $\rho = \rho_2(\varphi)$ es ortogonal a la definida por $\rho = \rho_1(\varphi)$, será imagen de una función vectorial $\vec{x}_2(\varphi) = (\rho_2(\varphi).\cos\varphi; \rho_2(\varphi).\operatorname{sen}\varphi)$, cuyo vector tangente será también su vector derivado:
$\vec{x}\,'_2(\varphi) = (\rho'_2(\varphi).\cos\varphi - \rho_2(\varphi).\operatorname{sen}\varphi; \rho'_2(\varphi).\operatorname{sen}\varphi + \rho_2(\varphi).\cos\varphi)$
En el punto donde se cortan ortogonalmente deberá cumplirse: $\rho_1(\varphi) = \rho_2(\varphi)$ (porque se cortan) y
$\vec{X}\,'_1(\varphi).\vec{X}\,'_2(\varphi) = 0$ (por ser perpendiculares).

$$\rho'_1(\varphi).\rho'_2(\varphi)\cos^2\varphi + \rho^2{}_1(\varphi).\operatorname{sen}^2\varphi - \cancel{\rho'_1(\varphi)\rho_2(\varphi)\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi} - \cancel{\rho_1(\varphi)\rho'_2(\varphi)\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi} +$$
$$+ \rho'_1(\varphi)\rho'_2(\varphi).\operatorname{sen}^2\varphi + \cancel{\rho'_1(\varphi)\rho_2(\varphi)\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi} + \cancel{\rho_1(\varphi)\rho'_2(\varphi)\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi} + \rho^2{}_1(\varphi).\cos^2\varphi = 0$$

$$\rho'_1(\varphi).\rho'_2(\varphi)\underbrace{\left[\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi\right]}_{1} + \rho_1{}^2(\varphi).\underbrace{\left[\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi\right]}_{1} = 0$$

Entonces, si indicamos con ρ a la función conocida y con ρ_1 a su perpendicular, se debe cumplir: $\rho'_1 . \rho' + \rho^2 = 0 \Rightarrow \rho'_1 = -\frac{\rho^2}{\rho'}$

<u>Líneas de campo y equipotenciales para campos conservativos</u>

Dado un campo vectorial conservativo $\vec{F}(x;y) = (P(x;y);Q(x;y))$ es posible hallar una función U(x;y) (función potencial) / $\vec{F}(x;y) = \vec{\nabla}U(x;y)$.

Por otra parte, un campo vectorial puede definir un campo de direcciones , es decir puede definir el conjunto de vectores tangentes a una flia. de curvas que se llaman **líneas de campo.**

Las líneas **equipotenciales** son las curvas de nivel de la función potencial. Como el gradiente es perpendicular a las curvas de nivel y , en este caso, es tangente a las líneas de campo, resulta que las líneas de campo son las trayectorias ortogonales de las curvas equipotenciales.

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

I.- Funciones L.I

Un conjunto de n funciones $\{y_1(x), y_2(x),...,y_n(x)\}$ es ***linealmente independiente*** (L.I.) en un intervalo (a, b) si y sólo si para cualquier x perteneciente al intervalo se cumple que la única combinación lineal de las n funciones que da la función nula es la que tiene todos los coeficientes iguales a cero.

En símbolos:

$$\{y_1(x);y_2(x);\cdots;y_n(x)\}\ es\ \ L.I. \Leftrightarrow \forall x \in [a,b]:\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot y_i(x) = 0 \Rightarrow c_i = 0, para\ \ i \in \{1,2,\ldots n\}\right]$$

II.-Wronskiano

Wronskiano de un conjunto de n funciones $\{y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)\}$, derivables hasta el orden (n-1) , es el determinante de la matriz formada por las funciones y sus (n -1) primeras derivadas

$$W(y_1,....,y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

III.- Teorema

Si el wronskiano de n funciones es no nulo para todo x perteneciente al intervalo (a,b) entonces las n funciones son L.I en (a,b).

En efecto:
Planteemos una combinación lineal nula de las n funciones. Debemos probar que los coeficientes de tal combinación sólo pueden ser “0”.

Para hallar los n coeficientes debemos formar u sistema de n ecuaciones con n incógnitas.Para ello derivamos la combinación lineal (n-1) veces:

$$\begin{cases} C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n = 0 \\ C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + ... + C_n y'_n = 0 \\ ..... \\ C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + ... + C_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Éste, para cada valor de x ,es un sistema lineal y homogéneo respecto de las incógnitas $C_1, C_2,...,C_n$.

El determinante de los coeficientes es, para cada valor de x, el wronskiano de las n funciones, que por hipótesis es distinto de cero. Por lo tanto el sistema tiene solución única que es la trivial. Es decir, los C_i son nulos, para cualquier i, y las funciones resultan linealmente independientes.

IV.-Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

Responden a la forma:

$a_o(x).y'' + a_1(x).\ y' + a_2(x).y = Q(x)$ con $a_i(x)$ continuas.

Si los a_i son constantes, la ec. se llama ***ecuación diferencial de segundo orden lineal con coeficientes constantes***. Si Q(x) = 0, se dice que es ***homogénea*** o con segundo miembro nulo o reducida.

IV.1.-Propiedad

Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son S.P. de $a_o.y'' + a_1.y' + a_2.y = 0$

entonces cualquier combinación lineal de ellas también es solución.

En efecto: Sea $y = C_1y_1 + C_2y_2$, resulta

$$y' = C_1y'_1 + C_2y'_2$$

$$y'' = C_1y''_1 + C_2\, y''_2$$, reemplazando en la ec. dif. se tiene:

$$a_o.(C_1y''_1 + C_2\, y''_2) + a_1.(\ C_1y'_1 + C_2\, y'_2) + a_2.(\ C_1y_1 + C_2\, y_2\ ) =$$

$$= C_1.\underline{(a_o.y''_1 + a_1.y'_1 + a_2.y_1)} + C2.\underline{(a_o.y''_2 + a_1.y'_2 + a_2}.y_2) = 0$$

0 pues y_1 es S.P 0 pues y_2 es S.P

Luego $y = C_1y_1 + C_2y_2$ es solución de la ecuación diferencial

Además si y_1 e y_2 son S.P.L.I de la ecuación diferencial, $a_o.y'' + a_1.y' + a_2.y = 0$, cualquier otra solución se puede escribir como combinación lineal de ellas.

En efecto:

Sean y_1 e y_2 dos S.P L.I de $a_o.y'' + a_1.y' + a_2.y = 0$ y sea "y" otra S.P. cualquiera que satisface las condiciones

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

Se quieren determinar los coeficientes de una combinación lineal que permita expresar y en función de y_1 e y_2..

Se quiere que: $y_o = c_1\, y_1(x_o) + c_2.\, y_2(x_o)$
$y'_o = c_1\, y'_1(x_o) + c_2.\, y'_2(x_0)$

Es un sistema lineal homogéneo con solución única ya que el determinante de los coeficientes es distinto de cero por ser el wronskiano de dos funciones L.I.

Por lo tanto la S.G. de la ecuación diferencial. de segundo orden lineal reducida , se obtiene como combinación lineal de dos S.P de la misma.

V.-Para encontrar S.P. de la ecuación diferencial de segundo orden, lineal, con coeficientes constantes y segundo miembro nulo.

Proponemos una solución de la forma $y = e^{r\,x}$

Veremos que valor debe tomar "r"para que y sea solución de la ecuación diferencial

$a_o.y'' + a_1.y' + a_2.y = 0$
Obtenemos y'e y" y reemplazamos en la ecuación diferencial

$y' = r.e^{rx}$; $y'' = r^2.\, e^{rx}$

Debe ser, sacando e^{rx} de factor común: $e^{r\,x}.(\, a_o.r^2 + a_1.r + a_2) = 0.$

Como el primer factor no puede ser cero, debe cumplirse:
$a_o.r^2 + a_1.r + a_2 = 0$ (***Ecuación característica***)

Al resolver esta ecuación pueden presentarse distintas situaciones:

a) Que tenga raíces reales y distintas (r_1 y r_2)

En este caso obtenemos dos S.P: $y_1 = e^{r_1 x}$; $y_2 = e^{r_2 x}$

Debemos probar que son L.I.Para ello hallamos su wronskiano:

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1.e^{r_1 x} & r_2.e^{r_2 x} \end{vmatrix} = .e^{r_1 x} \cdot .e^{r_2 x}\left(r_1 - r_2\right) \neq 0,$$

pues los primeros factores son exponenciales y el tercero no puede ser cero por ser la diferencia entre dos números distintos.

Como las S.P. halladas son L.I., la S.G. de $a_o.y'' + a_1.y' + a_2.y = 0$, es:

$$\boxed{y = c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x}}$$

b) Que tenga raíces complejas conjugadas

$r_1 = a + b\,y$; $r_2 = a - bi$

En este caso es válido lo planteado para el anterior, pero recurrimos a la fórmula de la exponencial compleja para trabajar con funciones de variable real.
Recordamos que:

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i.\ \mathrm{sen}\varphi}$$

La S.G. es $y = c_1 \cdot e^{r_1 x} + c_2 \cdot e^{r_2 x}$

$$y = c_1 \cdot e^{(a+bi)\,x} + c_2 \cdot e^{(a-bi)\,x} = e^{ax}\left(c_1 \cdot e^{b\,i\,x} + c_2 \cdot e^{-b\,i\,x}\right) =$$

$$= e^{ax}.[c_1.(\cos bx + i\,\mathrm{sen}\,bx) + c_2.(\cos(-bx) + i\,\mathrm{sen}(-bx))] =$$

$= e^{ax}.[(c_1 + c_2)\cos bx + i.(c_1 - c_2)\,\mathrm{sen}bx]$,teniendo en cuenta que

$\cos(-bx)=\cos bx$; $\mathrm{sen}(-bx) = -\,\mathrm{sen}bx$

y llamamos: $A_1 = c_1 + c_2$ y $A_2 = c_1 - c_2$

Luego para el caso en que las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas, la S.G. es

$$\boxed{y = e^{ax}.(A_1 \cos bx + A_2\,\mathrm{sen}bx)}$$

c) Que tenga raíces reales e iguales.

Si $r_1 = r_2$, una S.P es $y_1 = e^{r_1 x}$. Probaremos que $y_2 = x\,.e^{r_1 x}$ tambien es S.P . y que además, así definidas y_1 e y_2 son L.I.

$y_2 = x.\,e^{r_1 x} \quad \Rightarrow \quad y'_2 = e^{r_1 x} + r_1\,x\,e^{r_1 x} = e^{r_1 x}.\,(1 + r_1.x)$,

$y''_2 = r_1.e^{r_1 x}.(1 + r_1\,x) + r_1.e^{r_1 x} = e^{r_1 x}\,.(2.r_1 + r_1^2.x)$,

reemplazando en la ecuación diferencial
se tiene:

$$e^{r_1 x}.[a_o.\,(2.r_1 + r_1^2.x) + a_1.(1 + r_1.x\,) + a_2.x] = e^{r_1 x}.[x.(a_o.r_1^2 + a_1.r_1 + a_2) + (2a_o r_1 + a_1)] = 0$$

es 0 pues r_1 es raíz de la ec. caract

es 0 pues r_1 es raíz. doble de la ec. caract. y por lo tanto es raíz de su polinomio derivado.

.

Además y_1 e y_2 son LI.

$$W=\begin{vmatrix} e^{r_1 x} & xe^{r_1 x} \\ r_1.e^{r_1 x} & e^{r_1 x} + xr_1.e^{r_1 x} \end{vmatrix} = .e^{r_1 x}\cdot.e^{r_1 x}\left(1 + r_1 x - r_1 x\right) \neq 0,$$

Por lo tanto las funciones son L.I.

En este caso, la S.G. de $a_o.y'' + a_1.y' + a_2.y = 0$ es

$$\boxed{y = e^{r_1 x}.(C_1 + C_2.x)}$$

VI.- Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, lineales, con coeficientes constantes y segundo miembro no nulo.

Son de la forma : $a_o\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = G(x)$ con $a_i \in \mathbf{R}$, para $y \in \{0,1,2\}$ con $a_o \neq 0$ y G(x) continua en (a,b)

Teorema 1

La diferencia entre dos soluciones particulares de la ecuación:

$$a_o\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = G(x)(*)$$

es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada

$$a_o\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0$$

En efecto: Si $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son S.P de (*), se cumple:

$a_o\, u_1'' + a_1\, u_1' + a_2\, u_1 = G(x)$

$a_o\, u_2'' + a_1\, u_2' + a_2\, u_2 = G(x)$

Restando miembro a miembro se tiene:

$a_o\,(u_1'' - u_2'') + a_1\,(u_1' - u_2') + a_2\,(u_1 - u_2) = G(x) - G(x) = 0$, o sea:

$a_o\,(u_1 - u_2)'' + a_1\,(u_1 - u_2)' + a_2\,(u_1 - u_2) = 0$, lo que significa que $u_1(x) - u_2(x)$ es solución de la homogénea.

Teorema 2

Cualquier solución de (*) puede expresarse como suma de una S.P. de (*) más una combinación lineal de soluciones particulares L.I. de la ecuación homogénea asociada.

Consideremos : y_p S.P de (*) conocida y $u_1(x) - u_2(x)$ dos soluciones L.I. de la ecuación diferencial homógenea asociada.

Por el teorema anterior si $\varphi(x)$ es S.P de (*), entonces:

$\varphi(x)$- y_p es solución de la homogénea asociada, entonces podrá escribirse como combinación lineal de $u_1(x)$ y $u_2(x)$.

Es decir:

$$\varphi(x)- y_p = C_1\, u_1(x) + C_2\, u_2(x),$$

de donde cualquier S.P de (*) puede escribirse como:

$$\varphi(x)= y_p + C_1\, u_1(x) + C_2\, u_2(x),$$

Los últimos dos términos constituyen la S.G. de la homogéneas, por lo tanto la S.G de (*) se obtiene con:

$$y = y_h + y_p$$

Existen distintos métodos para obtener y_p ; analizaremos dos de ellos: el de variación de los parámetros y el de los coeficientes indeterminados.

- ***<u>Método de variación de los parámetros</u>***

Consideramos la ecuación homogénea asociada : $a_o\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0$.

Su solución general es $y_h = C_1\, u_1(x) + C_2\, u_2(x)$, siendo $u_1(x)$ y $u_2(x)$ L.I

Proponemos como solución particular una función de la forma de y_h pero pensando que C_1 y C_2 son funciones de x.

Es decir : $y_p = C_1(x) u_1(x) + C_2(x) u_2(x)$ (*).

Interesa encontrar $C_1(x)$ y $C_2(x)$ como para que la solución propuesta verifique la ecuación: $a_o\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = Q(x)$ (1)

Se busca un par de funciones que cumplan (1), pero se dispone de una sola ecuación con dos incógnitas. Para identificar algunos de los infinitos pares de funciones que podrían obtenerse, puede establecerse una condición arbitraria que en lo posible, facilite los cálculos.

Derivamos yp: $y'_p = \underline{C'_1(x) \,.\, u_1(x)} + C_1(x) \,.\, u'_1(x) + \underline{C'_2(x) \,.\, u_2(x)} + C_2(x) \,.\, u'_2(x)$

Para facilitar el cálculo de la derivada segunda, se impone como condición adicional que la suma de los términos subrayados sea 0.
Es decir:

(2) $$\boxed{C'_1(x) \,.\, u_1(x) + C'_2(x) \,.\, u_2(x) = 0}$$

Resulta: $y'_p = C_1(x) \,.\, u'_1(x) + C_2(x) \,.\, u'_2(x)$

Entonces: $y''_p = C'_1(x) \cdot u'_1(x) + C_1(x) \cdot u''_1(x) + C'_2(x) \cdot u'_2(x) + C_2(x) \cdot u''_2(x)$

Reemplazando en (1) se tiene:

$a_0 (C'_1(x) \cdot u'_1(x) + C_1(x) \cdot u''_1(x) + C'_2(x) \cdot u'_2(x) + C_2(x) \cdot u''_2(x)) + a_1 (C_1(x) \cdot u'_1(x) + C_2(x) \cdot u'_2(x)) + a_0 (C_1(x) \cdot u_1(x) + C_2(x) \cdot u_2(x)) = Q(x)$

Agrupamos los términos que contienen $C_1(x)$ y los que contienen $C_2(x)$

Por lo tanto es:

$C_1(x) \{ \underline{a_0 u''_1(x) + a_1 u_1'(x) + a_2 u_1(x)} \} + C_2(x) . \{ \underline{a_0 u''_2(x) + a_1 u'_2(x) + a_2 u_2(x)} \} +$

$a_0 \{ C'_1(x) \cdot u''_1(x) + C'_2(x) \cdot u''_2(x) \} = Q(x)$

Las expresiones subrayadas dan cero porque $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada; por lo tanto queda:

$$a_0 \{ C'_1(x) \cdot u''_1(x) + C'_2(x) \cdot u''_2(x) \} = Q(x) \Rightarrow$$

(3) $$\boxed{C'_1(x) \cdot u'_1(x) + C'_2(x) \cdot u'_2(x) = Q(x)/a_0}$$

El sistema que nos permitirá resolver el problema es:

$C.'_1(x)u_1(x) + C'_2(x)u_2(x).=0$
$C'_1(x) \cdot u'_1(x) + C'_2(x) \cdot u'_2(x) = Q(x)/a_0$

Resolvemos el sistema por Cramer:

$$C'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2 \\ Q(x)/a_0 & u'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{vmatrix}} \quad \text{y} \quad C'_2 = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ u'_1 & Q(x)/a_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'_1 & u'_2 \end{vmatrix}}$$

El denominador (que es el wronskiano de u_1 y u_2) es distinto de cero por ser $u_1(x)$ y $u_2(x)$ L.I . Luego el sistema tiene solución única y se puede obtener C'_1 y C'_2 .

Finalmente integrando se obtiene $C_1(x)$ y $C_2(x)$ que reemplazadas en (*) conduce a la y_P buscada.

- ***Método de los coeficientes indeterminados***

El método se puede aplicar sin problemas cuando Q(x) es:

1) Polinómica
2) Exponencial
3) Combinación de senos y cosenos
4) Combinación lineal de cualquiera de los casos anteriores.

El método consiste en proponer una función del mismo tipo con coeficientes a determinar.
Estos valores se obtienen derivando la función propuesta dos veces y reemplazando en la ecuación original.

1) $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$

Si al resolver la ecuación característica resulta que:	**entonces se propone como y_p:**
0 no es raíz (a_0, a_1 y a_2 son distintos de cero)	$\sum_{i=0}^{n} A_i x^i$ (El polinomio que se propone es un polinomio **completo** del mismo grado que Q(x), aunque a Q(x) le falten términos)
0 es raíz simple (a_2 =0)	$x.\sum_{i=0}^{n} A_i x^i$ Los coeficientes a determinar son los A_i.
0 es raíz doble (a_1=0 y a_2 =0)	$x^2 \sum_{i=0}^{n} A_i x^i$

2) $Q(x) = B.e^{\alpha x}$

Si al resolver la ecuación característica resulta que:	**entonces se propone como y_p:**
α no es raíz	$A\,e^{\alpha x}$ El coeficiente a determinar es A
α es raíz simple	$A.x.\ e^{\alpha x}$
α es raíz doble	$A.x^2.\ e^{\alpha x}$

3) $Q(x) = M \cos \beta x + N \operatorname{sen} \beta x$
(Aunque M ó N sean 0 se propone una combinación lineal de seno y coseno)

Si al resolver la ecuación característica resulta que:	**entonces se propone como y_p:**
$\pm\beta i$ no es raíz	$A_1 \cos \beta x + A_2 \operatorname{sen} \beta x$ Los coeficientes a determinar son los A_i
$\pm\beta i$ es raíz	$x.(A_1 \cos \beta x + A_2 \operatorname{sen} \beta x)$

4)Si Q(x) es una combinación lineal de los casos anteriores la y_p que se propone es una combinación lineal de las que se propondrían aisladamente.

Por ejemplo: $y'' - 2\,y' = x^2 + 3\,e^{2x} + \cos x$.

La ec. carac. es: $\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 0$

Entonces $y_p = x(A_2\,x^2 + A_1\,.x + A_0) + A_3\,.x.\,e^{2x} + A_4 \cos x + A_5 \operatorname{sen} x$

Curva Definición:

Sea $\vec{f}: S \subseteq \Re \to \Re^m$ una función continua en S se denomina **curva descripta** por $\vec{f}$ al conjunto imagen de S al aplicar $\vec{f}$

Curva lisa o suave:

Para que una curva sea suave o lisa $\vec{f}:[a,b] \subseteq \Re \to \Re^m$ tiene derivada continua para todo el intervalo y distinta de 0

Superficie Definición:

Sea $\vec{f}: S \subseteq \Re^2 \to \Re^3 \,/\, \vec{f}(\vec{x}) = \left(x(u,v); y(u,v); z(u,v)\right)$ una función vectorial de variable vectorial cuyas componentes son continuas en un conjunto conexo $S \subseteq \Re^2$ llamamos superficie a la **imagen** de $\vec{f}$

Superficie Regular:

Para que una superficie sea regular debe cumplir con:

1) Las derivadas parciales de la función deben existir y ser continuas
2) El producto el producto vectorial entre ambas tiene que ser distinto del vector nulo $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{f}}{\partial v} \neq \vec{0}$

Continuidad definición:

Sea $\vec{f}: S \subseteq \Re^n \to \Re^m$ y $\vec{f}$ es continua en x_0 punto de acumulación de $S \Leftrightarrow \begin{cases} \in \vec{f}(x_0) \\ \in \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B \\ \vec{f}(x_0) = B \end{cases}$

Definición de derivada de una función vectorial

Sea $\vec{f}(t): S \subseteq \Re \to \Re^n \wedge n \geq 2 \wedge t_0$ un punto interior de S. Se define $f'(t_0)$ como

$f'(t_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\vec{f}(x_0 + h) - \vec{f}(x_0)}{h}$ esto se aplica a las n componentes de la función

Recta tangente a la curva

Ya que la interpretación geométrica de la derivada es la obtención de un vector, el cual indica la dirección de la tangente a la curva en P_0 => $\vec{X} = \vec{f}(P_0) + \vec{f}'(P_0)$

Plano normal a la curva

$\left(\vec{X} - \vec{f}(t_0)\right) . \vec{f}'(t_0) = 0$

Definición de derivada de un campo escalar

Sea $f\left(\vec{x}\right): S \subseteq \Re^n \to \Re \wedge n \geq 2 \wedge \vec{x}_0$ un punto interior de S y $\vec{r}$ vector. Se define $f'(\vec{x}_0, \vec{r})$ como

$f'\left(\vec{x}_0, \vec{r}\right) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + h\,\vec{r}) - \vec{f}(\vec{x}_0)}{h}$

Teorema de Schwarz

Sea $f\left(\vec{x}\right): S \subseteq \Re^2 \to \Re$ existen $\vec{f}'_x, \vec{f}'_y, \vec{f}''_{xy}$ en un entorno de $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ punto interior de S. Si $\vec{f}''_{xy}$ es continua en $\vec{x}_0$ existe $\vec{f}''_{yx}$ y cumple con $\vec{f}''_{xy} = \vec{f}''_{yx}$

Diferenciabilidad definición

Sea $\vec{f}: S \subseteq \Re^n \to \Re^m$ definida en el conjunto abierto S. Decimos que $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ de S si **existe** una T.L. $T: \Re^n \to \Re^m$ tal que: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\left\| \vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - T(\vec{x} - \vec{x}_0) \right\|}{\left\| \vec{x} - \vec{x}_0 \right\|} = 0$

La T.L. T se llama diferencial de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$

Caso particular de diferenciabilidad con $f: S \subseteq \Re^2 \to \Re$ se puede expresar como

$\vec{f}(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = T(\vec{H}) + \left\| \vec{H} \right\| . \varepsilon(\vec{H})$ siendo $\lim\limits_{\left\| \vec{H} \right\| \to 0} \varepsilon(\vec{H}) = 0$

Teorema de existencia y derivabilidad de una función definida implícitamente por una ecuación

Dada $F : S \subseteq \Re^n \to \Re$ si

- $\exists \vec{X}_0 \in S / F(\vec{X}_0) = 0$
- F es continua en un entorno de $\vec{X}_0$
- Existen y son continuas en un entorno de $\vec{X}_0$ todas las derivadas parciales de F (Gradiente continuo)
- $\left.\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right|_{(\vec{x}_0)} \neq 0$

Entonces

- Existe un entorno $V(\vec{X}_0') \subseteq \Re^{n-1}$ con $\vec{X}_0' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \in \Re^{n-1}$; existe una única función $f : V(\vec{X}_0') \to \Re / f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = x_n$ y $F(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, f(\vec{X}_0')) = 0$ con derivadas parciales continuas
- $\vec{f}_{x_i} = -\dfrac{F'_{x_i}}{F'_{x_n}}$.

Definición de derivada direccional maxima.

$\cos\alpha = 1$

$$\max \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right|_{x_0} = \left\|\vec{\nabla} f(x_0)\right\|$$

Definición de derivada direccional minima.

$\cos\alpha = -1$

$$\max \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right|_{x_0} = -\left\|\vec{\nabla} f(x_0)\right\|$$

Regla de la cadena para campos vectoriales o de forma matricial

Sea $\vec{f} : U \subseteq \Re^n \to \Re^m$ un campo vectorial con derivadas parciales continuas (C1) en $\vec{X}_0 \varepsilon U$

Sea $\vec{g} : V \subseteq \Re^m \to \Re^s$ un campo vectorial con derivadas parciales continuas (C1) en $\vec{Y}_0 = \vec{f}(\vec{X}_0) \varepsilon V$ tal que

$\text{Img } \vec{f} \subseteq \text{Dom } \vec{g}$

Entonces existe $\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}$ y es un campo vectorial $\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f} : U \subseteq \Re^n \to \Re^s / \vec{h}(\vec{X}) = \vec{g}\left[\vec{f}(\vec{X})\right] = \vec{g}(\vec{Y})$ que es derivable en $\vec{X}_0$ y su natriz jacobiana está dada por $D\vec{h}(\vec{X}_0) = D\vec{g}\left[\underbrace{\vec{f}(\vec{X}_0)}_{\vec{Y}_0}\right] D\vec{f}(\vec{X}_0)$

Extremos condicion necesaria y suficiente

$F : S \subseteq \Re^2 \to \Re$

Puntos criticos: $F'_x(\vec{p}_0) = 0 \wedge F'_y(\vec{p}_0) = 0$

Analisis de los puntos criticos

$$H(\vec{p}_0) = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{cases} > 0 \begin{cases} F''_{xx} < 0 \Rightarrow F(p_0) \text{Maximo relativo} \\ F''_{xx} > 0 \Rightarrow F(p_0) \text{Minimo relativo} \end{cases} \\ < 0 \text{ punto de ensilladura} \end{cases}$$

Teorema de lagrange para extremos condicionados

Sean $F \wedge G : \Re \to \Re$ campos escalares diferenciables en un entorno de $\vec{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ con derivadas no nulas simultaneamente. Si $\vec{X}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto critico de f en el conjunto $A = \{(x, y, z) / G(x, y, z) = 0\}$ entonces existe un $\lambda_0 / (x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ es punto critico de $L(x, y, z, \lambda) = F(x, y, z) + \lambda G(x, y, z)$

Clasificacion de extremos

$$\vec{H}(x, y, \lambda) = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & G'_x \\ L''_{yx} & L''_{yy} & G'_y \\ G'_x & G'_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} > 0 \text{ maximo} \\ < 0 \text{ minimo} \\ = 0 \text{ nada informa} \end{cases}$$

Integrales de linea independientes del camino

Sea un campo vectorial diferenciable con gradiente continuo en un conjunto abierto y sean 2 puntos culesquiera pertenecientes a ese conjunto, que estan unidos por una curva regular a trozos "g"

$\varphi : s \subseteq \Re^n \to \Re \wedge \left(\vec{A}_0, \vec{B}_0\right) \subseteq s$ tal que esten unidos por $\vec{g}(t) : t \in [a, b]$

$$\int_c \vec{\nabla}\varphi . d\vec{g} = \varphi(\vec{B}) - \varphi(\vec{A})$$

Teorema de Green-Gauss

Sea $\vec{F} : S \subseteq \Re^2 \to \Re^2 / \vec{F}(x,y) = P(x,y)\breve{i} + Q(x,y)\breve{j}$ un campo vectorial con derivadas parciales continuas en el conjunto abierto $S \subseteq \Re^2$; sea D un recinto simplemente conexo en R² limitado por una curva cerrada C ($C = \vec{g}(t)$) frontera de D, orientada positivamente y de modo tal que S incluya a D y su frontera. Entonces

$$\oint_C \vec{F} . d\vec{g} = \int_{C^+} \left(P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right) = \iint_D \left[Q'_x(x,y) - P'_y(x,y)\right] dxdy$$

Teorema de Stokes

Sea $\vec{f} : S \subseteq \Re^3 \to \Re^3$ un campo vectorial derivable con continuidad en un conjunto abierto S que incluya a una superficie simple orientable Σ, que es la gráfica de una función con derivadas parciales segundas continuas, y a una curva regular a trozos C definida por la función vectorial $\vec{g}(t)$, que limita la superficie. Entonces

$$\iint_\Sigma \left(rot\ \vec{f} . \breve{n}\right) d\sigma = \oint_C \vec{f} . d\vec{g}$$

Teorema de Gauss o de la Divergencia

Sea $\vec{f} : S \subseteq \Re^3 \to \Re^3$ en un campo vectorial derivable con continuidad y definido en el conjunto abierto S que contiene a un sólido simple $V \subseteq \Re^3$ proyectable sobre los tres planos coordenados, limitado por una superficie orientada Σ con sus versores normales $\breve{n}$ apuntando hacia el exterior. Entonces $\iiint_V Div\ \vec{f}\ dx\ dy\ dz = \iint_\Sigma \vec{f} . \breve{n}\ d\sigma$

Propiedad de homogeneidad demostración

Propiedad: $\vec{f}'\left(\vec{x}_0;\lambda\vec{r}\right)=\lambda\,\vec{f}'\left(\vec{x}_0;\vec{r}\right)$

Demostración:

$$\vec{f}'\left(\vec{x}_0;\lambda\vec{r}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\vec{f}\left(\vec{x}_0;t\lambda\vec{r}\right)-\vec{f}\left(\vec{x}_0\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\lambda}{\lambda}\frac{\vec{f}\left(\vec{x}_0;t\lambda\vec{r}\right)-\vec{f}\left(\vec{x}_0\right)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\lambda\frac{\vec{f}\left(\vec{x}_0;t\lambda\vec{r}\right)-\vec{f}\left(\vec{x}_0\right)}{t\lambda}=\left\{\begin{matrix}t\to 0\\ \lambda t\to 0\end{matrix}\right\}=\lim_{\lambda t\to 0}\lambda\lim_{\lambda t\to 0}\frac{\vec{f}\left(\vec{x}_0;t\lambda\vec{r}\right)-\vec{f}\left(\vec{x}_0\right)}{\lambda t}=\lambda\,\vec{f}'\left(\vec{x}_0;\vec{r}\right)$$

Demostración de: función diferenciable => función continua.

Continuidad: $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(\vec{x}_0)$

Diferenciabilidad: $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\frac{\left\|\vec{f}(x)-\vec{f}(x_0)-T(x-x_0)\right\|}{\left\|x-x\right\|}=0$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\frac{\left\|\vec{f}(x)-\vec{f}(x_0)-T(x-x_0)\right\|}{\left\|x-x_0\right\|}=0\Rightarrow\varepsilon(x-x_0)=\frac{\vec{f}(x)-\vec{f}(x_0)-T(x-x_0)}{\left\|x-x_0\right\|}\Rightarrow$$

$$\varepsilon(x-x_0)\left\|x-x_0\right\|=\vec{f}(x)-\vec{f}(x_0)-T(x-x_0)\Rightarrow\vec{f}(x)=\vec{f}(x_0)+T(x-x_0)+\varepsilon(x-x_0)\left\|x-x_0\right\|\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0}\vec{f}(x)=\lim_{x\to x_0}\vec{f}(x_0)+\lim_{x\to x_0}T(x-x_0)+\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x-x_0)\left\|x-x_0\right\|$$

$\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x-x_0)\left\|x-x_0\right\|=0$ por el modulo tender a 0

$$\lim_{x\to x_0}T(x-x_0)=\lim_{x\to x_0}\nabla f(x_0)(x-x_0)=0$$

$\lim_{x\to x_0}\vec{f}(x)=\lim_{x\to x_0}\vec{f}(x_0)$ => f es continua en un entorno de x_0

Demostración existencia de derivada

Derivada de un campo escalar: $\vec{f}'(\vec{x}_0,\vec{r})=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{f}'(\vec{x}_0+h\vec{r})-\vec{f}'(\vec{x}_0)}{h}$

Diferenciabilidad: $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\frac{\left\|f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)-T(\vec{x}-\vec{x}_0)\right\|}{\left\|\vec{x}-\vec{x}_0\right\|}=0$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\frac{\left\|f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)-T(\vec{x}-\vec{x}_0)\right\|}{\left\|\vec{x}-\vec{x}_0\right\|}=0\Rightarrow\varepsilon(\vec{x}-\vec{x}_0)\left\|\vec{x}-\vec{x}_0\right\|=f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)-T(\vec{x}-\vec{x}_0)\Rightarrow$$

$$\varepsilon(\vec{x}-\vec{x}_0)\left\|\vec{x}-\vec{x}_0\right\|+T(\vec{x}-\vec{x}_0)=f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)$$

Primero que es $\vec{x}=\vec{x}_0+h\vec{r}$ pero como $\vec{r}=\breve{e}i$ es versor en x. Aplico limite

$$\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{f(\vec{x}_0+h(\breve{e}i))-f(\vec{x}_0)}{h}=\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{T(\vec{x}_0+h(\breve{e}i)-\vec{x}_0)}{h}+\lim_{\mathrm{h}\to 0}\varepsilon(\vec{x}_0+h(\breve{e}i)-\vec{x}_0\left\|\vec{x}_0+h(\breve{e}i)-\vec{x}_0\right\|\Rightarrow$$

$$f_x'(\vec{x}_0)=\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{T(h(\breve{e}i))}{h}+\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{\varepsilon(h(\breve{e}i))\left\|h(\breve{e}i)\right\|}{h}$$

Veamos que pasa con el segundo limite

$$\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{\varepsilon(h(\breve{e}i))\left\|h(\breve{e}i)\right\|}{h}=0\text{ ya que }\left\|h(\breve{e}i)\right\|=|h|.\overbrace{\left\|\breve{e}i\right\|}^{=1}=|h|\text{ entonces }\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{|h|}{h}\varepsilon(h(\breve{e}i))\text{ F acotada por infinitecimo}=0$$

$$f_x'(\vec{x}_0)=\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{T(h(\breve{e}i))}{h}=\lim_{\mathrm{h}\to 0}\frac{hT(\breve{e}i)}{h}=T(\breve{e}i)$$

Esto demuestra que si la función es diferenciable existe la derivada parcial para x. Esto se repite para cada derivada parcial. Si tomamos esta demostración y la aplicamos a todas las derivadas parciales como el versor no vale 1 para cada derivada parcial obtenemos lo siguiente

$$\boxed{f'(\vec{x}_0,\breve{r})=\vec{\nabla}f(\vec{x}_0).\breve{r}}$$

Demostración de la formula de la derivada implícita.

Suponiendo que una función esta definida implícitamente $F(x,y,z(x,y))=0\quad\forall(x,y)\in E(x_0,y_0)$

Derivando por regla de la cadena

$$\nabla F(x,y,z(x,y)).\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z'_x(x,y) & z'_y(x,y) \end{bmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P}_0 = (x_0, y_0, z(x_0, y_0) \Rightarrow$$

$$(F'_x(\vec{P}_0), F'_y(\vec{P}_0), F'_z(\vec{P}_0)).\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z'_x(x_0,y_0) & z'_y(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{cases} F'_x(P_0) + F'_z(P_0).z'_x(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow z'_x(x_0,y_0) = -\dfrac{F'_x(P_0)}{F'_z(P_0)} \\ F'_y(P_0) + F'_z(P_0).z'_y(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow z'_y(x_0,y_0) = -\dfrac{F'_y(P_0)}{F'_z(P_0)} \end{cases}$$

<u>Demostracion de la perpendicularidad entre el gradiente y las curvas de nivel</u>

Consideremos una curva "**g**" de nivel que pasa por (x_0, y_0, z_0) de la superficie $F(x_0, y_0, z_0) = k$

$\vec{g}(t) = (\vec{g}_1(t), \vec{g}_2(t), \vec{g}_3(t))$ derivable en $t_0 / \vec{g}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$

$F(x_0, y_0, z_0) = k \Rightarrow (F \circ \vec{g})t_0 = k \Rightarrow (F \circ \vec{g})' t_0 = 0 \Rightarrow$ Por regla de la cadena $\Rightarrow \nabla F(x_0, y_0, z_0).g'(t_0) = 0$

esto demuestra que el gradiente es perpendicular a cualquier curva de nivel

<u>Demostracion de independencia de camino</u>

$$\int_c \underbrace{(\vec{\nabla}\varphi)}_{F} d\vec{g} = \left\{ \begin{matrix} \vec{g} : t \to \vec{x} \\ \varphi : \vec{x} \to k \end{matrix} \Rightarrow h = \varphi \circ \vec{g}(t) \Rightarrow \varphi(\vec{g}(t)) = h(t) \right\} = \int_{t_1}^{t_2} \nabla\varphi(\vec{g}(t))dt = h(t_2) - h(t_1) = \varphi(\vec{g}(t_2)) - \varphi(\vec{g}(t1))$$

$$= \varphi(B) - \varphi(A)$$