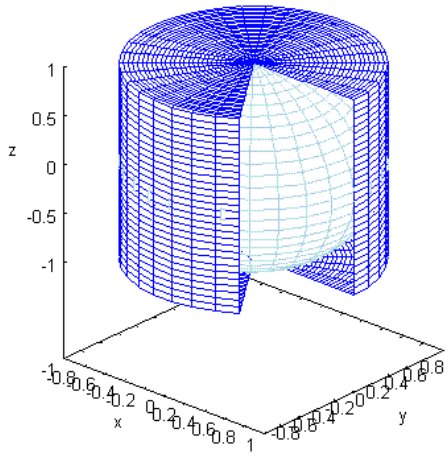


Universidad Tecnológica Nacional

Teoría

Análisis Matemático II

Damián Silvestre

17 de agosto de 2013

Resumen

Estas son unas notas teóricas que pueden ser de utilidad a quien esté cursando la materia Análisis Matemático II. La misma puede descargarse desde el blog http://analisis2.wordpress.com.

Se trata de un trabajo en proceso, aún no está completo, y no pretende sustituir la bibliografía oficial de la cátedra.

Cualquier error, comentario o sugerencia que pueda mejorar estas notas serán bien recibidas: pueden escribirme en la entrada correspondiente a estas notas en dicho blog (preferéntemente), o a mi dirección de correo electrónico dsilvestre@frba.utn.edu.ar.

Historial de versiones:

- (Versión 1) 24 de Mayo de 2013: Primera versión.
- (Versión 2) 17 de Agosto de 2013: Correcciones varias. Se agradece la lectura del apunte al profesor Victor Carnevali.

Índice

1. Nociones previas **1**
1.1. Conjuntos 1
1.2. Subconjuntos 2
1.3. Igualdad de conjuntos 2
1.4. Operaciones con conjuntos 2
1.5. Producto cartesiano 3
1.6. Cardinal 3
1.7. Funciones 3
1.8. Estructuras algebraicas 4

2. Ecuaciones diferenciales 1º parte **6**
2.1. Ecuaciones Diferenciables 6
2.2. Clasificación 6
2.3. Orden 7
2.4. Soluciones 7
2.5. Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables 7
2.6. Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal de 1º Orden . . . 8
2.7. Familias de curvas 8
2.8. Lineas de campo 8
2.9. Trayectoria ortogonal 9

3. Nociones de Topología **10**
3.1. Espacio euclídeo 10
3.2. Entorno 10
3.3. Clasificación de puntos de un subconjunto 10
3.4. Clasificación de conjuntos 11

3.5. Conjunto acotado 11
3.6. Conjunto conexo 12
3.6.1. Conjunto arco-conexo 12
3.6.2. Conjunto conexo por poligonales 13
3.6.3. Conjunto convexo 13
3.6.4. Conjunto símplemente conexo 13
3.7. Clasificación de funciones 14
3.8. Conjuntos de nivel 14

4. Límite y Continuidad **15**
4.1. Límite 15
4.1.1. Como probar que un límite no existe 15
4.1.2. Como probar que un límite si existe 16
4.2. Continuidad 17
4.2.1. Propiedades de funciones contínuas 17

5. Derivabilidad **18**
5.1. Derivada de función vectorial 18
5.2. Derivadas parciales, direccionales, y respecto a un vector 19
5.2.1. Propiedad de homogeneidad 20
5.2.2. Derivadas parciales sucesivas 20
5.2.3. Teorema de Schwarz 20
5.2.4. Función clase C^1 21
5.3. Curvas y Superficies 21

6. Diferenciabilidad **23**
6.1. Definición 23
6.2. Diferenciabilidad implica Derivabilidad 24
6.3. Diferenciabilidad implica Continuidad 25
6.4. Gradiente 26
6.5. El gradiente es normal al conjunto de nivel 26
6.6. Direcciones de derivada máxima, mínima y nula 27
6.7. C^1 implica diferenciable 28

7. Funciones Compuestas e Implícitas **28**
7.1. Función definida implícitamente 28
7.2. Teorema de Cauchy-Dini 29
7.3. Función Compuesta 29
7.4. Teorema de la Regla de la Cadena 30

8. Polinomio de Taylor y Extremos **30**
8.1. Polinomio de Taylor 30
8.2. Máximos y mínimos de una función 30
8.2.1. Criterio de la derivada primera 31
8.2.2. Matriz Hessiana 32
8.2.3. Criterio de la derivada segunda 32

8.3. Extremos condicionados 33

9. Integral de Línea y Función Potencial 35
9.1. Integral de Riemann 35
9.2. Curva regular a trozos, curva de jordan 35
9.3. Integral de línea 36
9.4. Campos conservativos 36
9.5. Teorema de la independencia del camino 37
9.6. Condición necesaria para la existencia de función potencial 38
9.7. Condición de suficiencia para la existencia de función potencial 38
9.8. Masa, momentos, centro 39

10. Integrales Múltiples 40
10.1. Teorema de Fubini en $\mathbb{R}^2$ 41
10.2. Teorema de cambio de variables 41
10.3. Coordenadas cartesianas y polares en $\mathbb{R}^2$ 41
10.3.1. Cartesianas 41
10.3.2. Polares 42
10.4. Coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas en $\mathbb{R}^3$ . . 42
10.4.1. Cartesianas 42
10.4.2. Cilíndricas 43
10.4.3. Esféricas 43
10.5. Cálculo de masa, momentos y centro para integrales múltiples 44

11. Integrales de Superficie y Flujo 45
11.1. Definición para superficie paramétrica 45
11.2. Caso superficie gráfica de campo escalar 46
11.3. Caso superficie definida implícitamente 46
11.4. Cálculo de masa, momentos, y centro para superficies . 47

12. Teoremas de Green, Stokes y Gauss 48
12.1. Teorema de Green 48
12.2. Teorema de Stokes 48
12.3. Teorema de la divergencia 49
12.4. Campos irrotacionales, solenoidales, y armónicos 49

13. Ecuaciones Diferenciales 2º parte 49
13.1. Ecuación diferencial ordinaria homogénea 49
13.2. Ecuación diferencial exacta 50
13.2.1. Convertible a exacta con factor integrante 50
13.3. Ecuación diferencial lineal de 2º orden 50
13.4. Wronskiano 52
13.5. Líneas de campo 52

1. Nociones previas

1.1. Conjuntos

Un **conjunto**[1] es una colección de objetos. Un elemento puede pertenecer o no a un conjunto.

Ejemplos:

1. $A = \{\text{casa}, \text{arbol}, \text{vaca}\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 23\}$
3. $C = \{2, 4, 77\}$
4. $D = \{-1, 1\}$

El conjunto A se describió por extensión, mientras que el conjunto B por comprensión.

Si un elemento pertenece a un conjunto se lo denota con $\in$, por ejemplo:

1. $\text{casa} \in A$
2. $11 \in B$

1.2. Subconjuntos

Si todos los elementos de un conjunto pertenecen también a otro, decimos que el primero es un **subconjunto** del segundo, y denotamos dicha relación por $\subseteq$, por ejemplo:

1. $D \subseteq B$

1.3. Igualdad de conjuntos

Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ decimos que $A = B$.

Ejemplo: $A = A$

[1] Al definir un conjunto como una colección, tengo que definir que es una colección. En realidad no vamos a definir un conjunto, sino que los vamos a manejar de manera intuitiva como una agrupación de objetos.

1.4. Operaciones con conjuntos

La **unión** de conjuntos permite juntar los elementos de dos conjuntos en uno, por ejemplo:

$E = A \cup B$

La **intersección** de conjuntos permite obtener un nuevo conjunto con los elementos comunes a dos conjuntos, por ejemplo:

$F = B \cap C = \{2, 4\}$

La **diferencia** de conjuntos nos permite obtener un nuevo conjunto a partir de los elementos de un conjunto que no están en otro conjunto. Ejemplo:

$B - C = \{x \in \mathbb{R} : (x \leq 23) \wedge (x \neq 2) \wedge (x \neq 4)\}$

Si interpretamos un conjunto A como subconjunto de otro conjunto U dado (universal), la diferencia la denominamos **complemento** y la denotamos por A^c, por ejemplo considerando $D \subseteq B$ tenemos

$D^c = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 23 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1\} = \{x \in B : x \neq -1 \wedge x \neq 1\}$

1.5. Producto cartesiano

Dados dos conjuntos A y B, podemos formar el conjunto de todos los pares ordenados con primer coordenada perteneciente al primer conjunto, y segunda coordenada perteneciente al segundo conjunto, este conjunto se denomina producto cartesiano $A \times B$. Ejemplo:

$A \times D = \{(\text{casa}, -1), (\text{arbol}, -1), (\text{vaca}, -1), (\text{casa}, 1), (\text{arbol}, 1), (\text{vaca}, 1)\}$

1.6. Cardinal

Si un conjunto A tiene una cantidad finita de elementos, decimos que es un conjunto finito, y denotamos su cardinal por $|A|$ o por $\#A$, por ejemplo:

1. $|A| = 3$
2. $|C \cup D| = 5$

Si en cambio el conjunto no tiene una cantidad finita de elmentos, decimos que es un conjunto infinito, por ejemplo B es un conjunto

infinito.

1.7. Funciones

Una **relación** entre un conjunto A y otro conjunto B es símplemente un subconjunto del producto cartesiano. Por ejemplo, una relación de A en D podría ser:

$R = \{(\text{casa}, -1), (\text{arbol}, -1), (\text{casa}, 1)\}$

El concepto de **función** es uno de los más importantes en matemáticas. Dados dos conjuntos A y B llamados dominio y codominio respectivamente, y una relación R entre ellos tal que

1. Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$. Es decir todo elemnto del dominio se relaciona con uno del codominio.
2. Si (a, b) y (a, c) pertenecen a R, entonces $b = c$. Es decir que el elemento con el que se relaciona es único.

Una relación que cumple 1 y 2 se dice que es una relación funcional, y la terna (A, B, R) se dice que es una función de A en B, y se denota con una letra, por ejemplo f.

En vez de escribir $(a, b) \in R$ se suele escribir $b = f(a)$.

Ejemplo:

$f : A \to B$

$f(\text{casa}) = -1$

$f(\text{arbol}) = 21$

$f(\text{vaca}) = 12$

Se denomina conjunto **imagen** de la función f al conjunto

$f(A) = \{b \in B : \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}$

Si $X \subseteq A$ llamamos imágen de X por f al conjunto

$f(X) = \{b \in B : \exists x \in X \text{ tal que } f(x) = b\}$

Si $Y \subseteq B$ llamamos **preimágen** de Y por f al conjunto

$f^{-1}(Y) = \{a \in A : f(a) \in Y\}$

Observamos que en ningún momento en la definición de función se requiere tener una expresión tipo "fórmula"para calcular los elementos de la imagen. Comprender esto es importante para los temas de derivada de función definida implícitamente por una ecuación, y ecuaciones diferenciales, que vienen luego en la materia.

1.8. Estructuras algebraicas

Un **grupo** es un conjunto G con una función $\cdot : G \times G \to G$ tal que

1. Es asociativa, para todo $a, b, c \in G$ se tiene $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot g)$
2. Existe elemento neutro $e \in G$ tal que $e \cdot g = g \cdot e = g$ (para todo $g \in G$)
3. Existe elemento inverso $g^{-1} \in G$ para cada $g \in G$ de forma tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$

Si además cumple ser **conmutativa**, es decir que para todo $a, b \in G$ se tiene $a \cdot b = b \cdot a$, se dice que es un grupo abeliano o conmutativo y se suele usar la notación aditiva ($+$ para la función, $-a$ para el inverso).

Ejemplos: $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ son grupos conmutativos.

Un **monoide**, es como la definición de grupo, pero sólo satisface 1. y 2. (no requiere 3, es decir no requiere inversos)

Ejemplo: $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot)$ es un monoide (no conmutativo), donde $\mathbb{R}^{2\times 2}$ representa las matrices de 2×2 con coeficientes reales, y $\cdot$ es la multiplicación de matrices)

Un **anillo** es un conjunto R con dos funciones $+ : R \times R \to R$ y $\cdot : R \times R \to R$, tales que

1. $(R, +)$ es grupo conmutativo.
2. $(R, \cdot)$ es un monoide.
3. La multiplicación se distribuye sobre la suma, es decir dados $a, b, c \in R$ se tiene $a \cdot (b + c) = ab + ac$ y $(b + c) \cdot a = ba + ca$

Observar que no hace falta que la multiplicación sea conmutativa, si lo es se dice que es un anillo conmutativo.

Ejemplos:

1. $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot)$ es un anillo (no conmutativo).

2. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo (la multiplicación es conmutativa).

Un **cuerpo** es un conjunto K con dos funciones $+ : K \times K \to K$, y $\cdot : K \times K \to K$ tales $(K, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo y además $(K - \{0\}, \cdot)$ es grupo conmutativo.

Ejemplos:

1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
2. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
3. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Observar que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ no es un cuerpo, en particular 2 no tiene inverso multiplicativo en $\mathbb{Z}$.

Un **espacio vectorial** es un conjunto V y un cuerpo K con una función $+ : V \times V \to V$ y una función $\cdot : K \times V \to V$ tal que

1. $(V, +)$ es grupo conmutativo.
2. $1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$
3. $a(bv) = (ab)v$ para todo $a, b \in K$ y $v \in V$
4. $k(v + w) = kv + kw$ para todo $k \in K$ y $v, w \in V$
5. $(k + q)v = kv + qv$ para todo $k, q \in K$ y $v \in V$

Ejemplo: $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Un **espacio con producto interno** es un espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ (que debe ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y con una función $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ tal que para todo $u, u', v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene

1. $\langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$
2. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$
3. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
4. $\langle v, v \rangle > 0$ si $v \neq 0$

Ejemplo: $\mathbb{R}^n$ con el producto punto definido por $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$ donde $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ forma un espacio con producto interno. Lo llamamos el producto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

Llamamos **espacio euclídeo**, a un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con un producto interno. El espacio euclídeo estándard con el que trabajamos en esta materia es $\mathbb{R}^n$ con el producto interno usual.

2. Ecuaciones diferenciales 1º parte

2.1. Ecuaciones Diferenciables

Una **ecuación diferencial** (E.D) es una ecuación en la que intervienen una o más variables independientes, y una variable dependiente y sus derivadas hasta un cierto orden.

2.2. Clasificación

1. Ordinarias (EDO): Interviene sólo una variable independiente (y la variable dependiente con sus derivadas ordinarias). Puede expresarse genéricamente como $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$.
2. En derivadas parciales: Interviene más de una variable independiente (y la variable dependiente con sus derivadas parciales). Puede expresarse como $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, f'_{x_1}, f'_{x_2}, f''_{x_1x_1}, f''_{x_1x_2}, \ldots) = 0$

2.3. Orden

El **orden** de una EDO es el orden de la derivada de mayor orden que interviene en la ecuación. Ejemplo: $y'' + 8xy' - 13y = 1$ posee orden 2.

El **grado** de una EDO existe sólo si la ecuación tiene forma polinómica, es decir la siguiente forma:

$p_n(x)(y^{(n)})^{a_n} + \ldots + p_1(x)(y')^{a_1} + p_0(x)y^{a_0} = q(x)$

donde $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{N}$

En dicho caso, el grado de la EDO es el del exponente de la derivada de mayor orden.

Ejemplo: $(y''')^2 + y'' + (y')^3 = x$ tiene grado 2.

2.4. Soluciones

Las podemos clasificar en tres grupos

1. Solución General (SG): Es una familia de funciones que verifican la EDO y poseen n constantes arbitrarias. (donde n es el orden de la EDO). Simbólicamente la podemos expresar como $F(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$
2. Solución Particular (SP): Es una función que verifica la EDO y se puede obtener asignando valores a las constantes arbitrarias de la SG.
3. Solución Singular (SS): Es una función que verifica la EDO pero no se deduce de la SG.

2.5. Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables

Una EDO se dice que es de variables separables si mediante operaciones algebraicas se la puede llevar a la forma

$y' = \frac{p(x)}{q(y)}$

o, usando la notacion de Leibniz

$q(y)dy = p(x)dx$

basta con integrar (hallar una primitiva) ambos miembros para hallar la solución, y agregar la constante arbitraria en un lado de la igualdad.

$\int q(y)dy = \int p(x)dx + C$

2.6. Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal de 1º Orden

La ecuación de una EDO lineal de orden n se puede expresar de la forma

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$

En particular una EDO lineal de 1º orden se puede expresar como

$y' + a_0(x)y = g(x)$

Hay varios métodos de resolución. Uno fácil es con la sustitución

$y = uv$.

Si $g(x) = 0$ (es la función constante 0), se dice que la EDO es homogénea.

2.7. Familias de curvas

Llamamos **familia de curvas** a una familia de ecuaciones implícitas en el plano xy, parametrizadas por constantes arbitrarias $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Simbólicamente la podemos expresar de la forma

$F(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$

Cuando encontramos la SG de una EDO, la misma viene expresada por una familia de curvas (que define a y implícitamente en función de x, y no siempre es posible o conveniente explicitar las funciones solución) con tantos parámetros como el orden de la EDO. Recíprocamente, dada una familia de curvas, podemos buscar una EDO tal que la misma sea su SG.

2.8. Lineas de campo

Dado un campo vectorial $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, una línea de campo es una curva tal que en todo punto su vector tangente es igual a f.

Más precisamente, si $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es la parametrización regular de una curva incluída en A°, entonces se cumple que $g'(t_0) = f(g(t_0))$ para todo $t_0 \in (a, b)$

2.9. Trayectoria ortogonal

Dos curvas son ortogonales en un punto en común A si ambas admiten vector tangente en A, y dichas vectores son ortogonales entre sí. Es decir que si $g_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $g_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ son parametrizaciones regulares de las curvas, y si $X_0 = g_1(t_1) = g_2(t_2)$ (es decir se cruzan en dicho punto X_0), y si $g_1'(t_1) \cdot g_2'(t_2) = 0$ (es decir el producto escalar de sus vectores tangentes es cero), entonces dichas curvas son perpendiculares en el punto de intersección X_0.

Enfoque cartesiano: $y_0 = y_1(x_0)$ $y_0 = y_2(x_0)$

$y = y_1(x_0) + \underbrace{m_1}_{y_1'(x_0)}(x - x_0)$ $y = y_2(x_0) + \underbrace{m_2}_{y_2'(x_0)}(x - x_0)$

Condición de ortogonalidad:

$m_2 = -\frac{1}{m_1}$

es decir

$y_2'(x_0) = -\frac{1}{y_1'(x_0)}$

Enfoque paramétrico:

$y = y_1(x)$ $y = y_2(x)$

$g_1(t) = (t, y_1(t))$ $g_2(t) = (t, y_2(t))$

$g_1'(t) = (1, y_1'(t))$ $g_2'(t) = (1, y_2'(t))$

Condición de ortogonalidad:

$g_1'(t) \cdot g_2'(t) = 0$ $(1, y_1'(t)) \cdot (1, y_2'(t)) = 0$ $1 + y_1'(t)y_2'(t) = 0$

$y_2'(t) = -\frac{1}{y_1'(t)}$

3. Nociones de Topología

3.1. Espacio euclídeo

Un espacio vectorial real junto con un producto interno forma una estructura que llamamos Espacio Euclídeo.

En esta materia vamos a trabajar con el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ estándard, es decir con el producto interno común (el producto escalar) definido como

$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n$

El producto interno nos permite definir una noción de ángulo entre vectores de la siguiente manera

$\cos(\phi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{||\vec{v}||||\vec{w}||}$

En el espacio euclídeo, definimos la norma de un vector como

$||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots v_n^2}$

La noción de norma nos permite definir una noción de distancia entre puntos del espacio, de la siguiente manera

$d(\vec{v}, \vec{w}) = ||\vec{w} - \vec{v}|| = \sqrt{(w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2 + \ldots + (w_n - v_n)^2}$

3.2. Entorno

Llamamos entorno (abierto) con centor x_0 y radio $r > 0$ al conjunto

$E(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < r\}$

Y análogamente el entorno cerrado es

$E[x_0, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) \leq r\}$

También nos puede llegar a servir la noción de entorno reducido:

$E'(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < d(x, x_0) < r\} = E(x_0, r) - \{x_0\}$

3.3. Clasificación de puntos de un subconjunto

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces decimos que x respecto de A es

1. Punto interior: Si existe $E(x, \delta) \subseteq A$.
2. Punto exterior: Si existe $E(x, \delta) \subseteq \mathbb{R}^n - A$. Equivaléntemente $E(x, \delta) \cap A = \emptyset$.
3. Punto frontera: Si no es punto interior ni exterior. Es decir que para todo $\delta > 0$ se tiene $E(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$ y $E(x, \delta) \cap (\mathbb{R}^n - A) \neq \emptyset$
4. Punto clausura (o adherencia): Si existe un entorno tal que $E(x, r) \cap A \neq \emptyset$
5. Punto de acumulación (o punto límite): Si para todo entorno del punto, $E(x, r) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$.
   Equivaléntemente, si para todo entorno reducido del punto, $E'(x, r) \cap A \neq \emptyset$
6. Punto aislado: Si existe un entorno tal que $E(x, r) \cap A = \{x\}$

El interior de un conjunto A es el conjunto de sus puntos interiores A°

La clausura de un conjunto A es el conjunto de sus puntos de clausura $\overline{A}$

El conjunto derivado de un conjunto A es el conjunto de todos sus puntos de acumulación A'

Siempre se cumple $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$

3.4. Clasificación de conjuntos

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, decimos que es un

1. Conjuto abierto: Si $A = A^\circ$. Es decir si todos los puntos del conjunto son interiores.
2. Conjunto cerrado: Si $A = \overline{A}$. Es decir si todos los puntos de clausura pertenecen al conjunto. Equivale a decir que el conjunto contiene a todos sus puntos frontera, y también equivale a decir que contiene a todos sus puntos de acumulación. También equivale a que el complemento es abierto.

Observación: Un conjunto puede no ser ni abierto ni cerrado (Ej. $[0, 1) \subset \mathbb{R}$), o puede ser abierto y cerrado a la vez (Ej. $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$)

3.5. Conjunto acotado

Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado si el mismo está contenido en algún entorno del origen, es decir si $A \subseteq E(0, r)$ para algún $r > 0$.

3.6. Conjunto conexo

Intuitivamente, un conjunto conexo es aquel formado por una sola 'pieza', que no se puede 'dividir'.

Para ejemplificar esta parte vamos a utilizar estos tres conjuntos

$A = \mathbb{R}^n$

$B = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

$C = D^2(4, 4) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 4)^2 + (y - 4)^2 \leq 1\}$

Una *escisión* de un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ son dos conjuntos disjuntos abiertos A, B tales que $X \subseteq A \cup B$. Decimos que la misma es no trivial si $A \cap X \neq \emptyset$ y $B \cap X \neq \emptyset$.

Un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es **conexo** si no admite escisiones no triviales. En caso contrario decimos que es **disconexo**.

Por ejemplo $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ son todos conjuntos conexos. En cambio $D = B \cup C$ es disconexo, pues si $X = E((0,0),2))$ y $Y = E((4,4),2)$ se tiene X e Y abiertos, y disjuntos, $D \subseteq X \cup Y$, $X \cap D \neq \emptyset$, $Y \cap D \neq \emptyset$, luego se trata de una escisión no trivial y el conjunto D es disconexo.

3.6.1. Conjunto arco-conexo

Si $a, b \in \mathbb{R}^n$, un **camino** de a a b es una función $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ contínua, tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$

Ejemplo: Si $a, b \in \mathbb{R}^n$ el **camino recto** entre a y b es la función $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tal que

$\alpha(t) = ta + (1-t)b$

La imagen de dicho camino es el segmento de recta

$[a, b] = \{ta + (1-t)b : t \in [0,1]\}$

Si α es un camino de a a b, y β es un camino de b a c, definimos $\alpha \wedge \beta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ de la forma

$$(\alpha \wedge \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

De esta forma $\alpha \wedge \beta$ es un camino que une a con c, lo llamamos la **yuxtaposición** de α con β.

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ decimos que es **arco-conexo** si para todos los $a, b \in A$ existe un camino α que une a con b dentro del conjunto, es decir tal que $\alpha([0,1]) \subseteq A$.

En los ejemplos, los conjuntos A, B, C son todos arco-conexos.

Todo conjunto arco-conexo es conexo, pero no vale la vuelta, es decir hay conjuntos conexos que no son arco-conexos.

3.6.2. Conjunto conexo por poligonales

Una **poligonal** es la yuxtaposición de una cantidad $n \in \mathbb{N}$ finita de caminos rectos $\alpha_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}^n$. A lo puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ los

llamamos vértices de la poligonal, y se recorren en dicho orden.

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es **conexo por poligonales** si para todos $a, b \in A$ existe una poligonal π que comienza en a, termina en b, y está contenida en A.

Esta noción es ás fuerte que arco-conexo, es decir si un conjunto es conexo por poligonales entonces también es arco-conexo, pero no vale la vuelta.

En los ejemplos, los conjuntos A y C son conexos por poligonales, aunque el conjunto B (que es arco-conexo) no es conexo por poligonales.

3.6.3. Conjunto convexo

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ decimos que es **convexo** si para todo $a, b \in A$ el camino recto que los une no se sale del conjunto, es decir $[a, b] \subseteq A$.

Esta noción es la más fuerte de las nociones de conexidad: si un conjunto es convexo entonces es conexo por poligonales (cláramente, el mismo camino recto que los une es una poligonal).

3.6.4. Conjunto símplemente conexo

Esta es la noción más compleja de conexidad que vemos. Intuitivamente, un conjunto es símplemente conexo si toda curva cerrada simple (curva de Jordan) se puede "deformar contínuamente"hasta llegar a un punto. En $\mathbb{R}^2$ esto sería equivalente a que el conjunto no tiene .ªgüjeros".

Más formalmente, un conjunto X es símplemente conexo si es arco-conexo y toda función contínua $f : S^1 \to X$ (donde S^1 denota el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$) se puede extender a una función contínua $F : D^2 \to X$ (donde D^2 denota el disco unitario en $\mathbb{R}^2$) tal que F restringida a S^1 es f, y tal que la imágen de F no se sale del conjunto, es decir $F(D^2) \subseteq X$.

3.7. Clasificación de funciones

Todas las funciones con las que trabajamos en esta materia son de la forma $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Las clasificamos en 4 grupos

1. Si $n = m = 1$ es una **función escalar**.
2. Si $n = 1$ y $m > 1$ es un **campo escalar**.
3. Si $n > 1$ y $m = 1$ es una **función vectorial**.
4. Si $n > 1$ y $m > 1$ es un **campo vectorial**.

Tiene sentido decir que las funciones más generales que estudiamos son los campos vectoriales, y que las otras son casos particulares, y que la función escalar es la que se estudió en Análisis 1, en esta materia generalizamos a más de una dimensión tanto en el dominio como el codominio de las funciones.

3.8. Conjuntos de nivel

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar, y sea $k \in \mathbb{R}$

Definimos el conjunto de nivel k de f como la preimágen de k por f, es decir como

$C_k(f) = f^{-1}(k) = \{x \in A : f(x) = k\}$

Análogamente, definimos el conjunto de positivadad como la preimágen del conjunto de todos los reales positivos, es decir como

$C^+(f) = f^{-1}((0, +\infty)) = \{x \in A : f(x) > 0\}$

4. Límite y Continuidad

4.1. Límite

Dado el campo vectorial $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y x_0 punto de acumulación de A, decimos que existe el **límite** $l \in \mathbb{R}^m$ cuando x tiende a x_0 si para todo entorno $E(l, \epsilon)$ existe un entorno reducido $E^*(x_0, \delta)$, tal que si $x \in E^*(x_0, \delta) \cap A$, entonces $f(x) \in E(l, \epsilon)$. En otras palabras $f(E^*(x_0, \delta) \cap A) \subset E(L, \epsilon)$.

Equivaléntemente, la definición clásica de límite: existe límite l si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$, si

$0 < ||x - x_0|| < \delta$ entonces $||f(x) - l|| < \epsilon$

Y en ese caso denotamos

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} f(\vec{x}) = l$$

En la práctica esta definición nos interesa sólo a nivel teórico, pues en la práctica los ejercicios de límites los podemos resolver usando las propiedades de las funciones contínuas.

Para funciones vectoriales y campos vectoriales es útil el siguiente teorema:

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con funciones coordenadas $f = (f_1, \ldots, f_m)$ y $x_0 \in A'$, entonces el límite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe si y sólo existen todos los límites $\lim_{x\to x_0} f_i(x) = l_i$ con $1 \leq i \leq m$, y en dicho caso el límite de f es $\lim_{x\to x_0} f(x) = (l_1, \ldots, l_m)$

Por último, si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene funciones coordenadas $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ entonces f es contínua en x_0 si y solo sí cada componente f_i es contínua en x_0 para todo $1 \leq i \leq m$.

4.1.1. Como probar que un límite no existe

Sea $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si existe el límite $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ y si $B \subset A$ tal que $x_0 \in B'$ (es decir el x_0 es punto de acumulación de B), y si $g : B \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la restricción de f a B, entonces también existe $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$.

Esto nos da un criterio para determinar cuando un límite no existe: Puedo probar por çaminos", y si por dos caminos el límite da valores distintos es que el límite de la función original no existe, ya que de otra forma debería dar siempre el mismo límite.

Acá por çamino que se acerca a x_0"nos referimos a un subconjunto del dominio tal que x_0 es punto de acumulación de él.

Observación: Aunque pruebe por 700 caminos y todos coincidan en el límite, este criterio no implica que no haya un camino "701"que vaya a dar distinto, es decir que si el límite existía, hay que demostrarlo de una forma mas general.

Otra herramienta para determinar cuando un límite NO existe son los límites laterales: si estos no coinciden el límite de la función original no existe.

Ejemplo: Sea $f(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^4)}{x^2+y^2}$. Analizar la existencia de límite de f en $(0, 0)$.

$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{\sin(x^2+y^4)}{x^2+y^2}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}=1=L_{yx}$

$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2+y^4)}{x^2+y^2}\right]$

$=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y^4)}{y^2}$

$=\lim_{y\to 0}\frac{4y^3\cos(y^4)}{2y}$

$=\lim_{y\to 0}\frac{4y^2\cos(y^4)}{2}=0=L_{xy}$

Como $L_{yx}\neq L_{xy}$ no existe el límite pedido.

4.1.2. Como probar que un límite si existe

Una forma que funciona a veces es utilizar el siguiente teorema:

Sean $f,g,h:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, y $x_0\in A'$.

Si $f=g\cdot h$ con g acotada, es decir $g(A)$ un conjunto acotado, y h infinitésimo, es decir $\lim_{x\to x_0}h(x)=0$ entonces el límite de f cuando $x\to x_0$ existe y es cero, es decir $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$

Además, supongamos que existen los límites $\lim_{x\to x_0}g(x)=l_1$ y $\lim_{x\to x_0}h(x)=l_2$.

Entonces si $f=g\pm h$, se tiene que $\lim_{x\to x_0}f(x)=l_1\pm l_2$.

Y si $f=g\cdot h$, se tiene que $\lim_{x\to x_0}f(x)=l_1\cdot l_2$.

Otra técnica que puede servir es la de relizar un cambio de varibles que reduzca la cantidad de variables. Por ejemplo, si $f(x,y)=\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, entonces el $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$, pues realizando la sustitución $u=x^2+y^2$ se tiene que cuando $(x,y)\to(0,0)$ entonces $u\to 0$ (pues x^2+y^2 es contínua), y por lo tanto el límite pedido equivale a $\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{u}=1$

4.2. Continuidad

Dado un campo vectorial $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, y un punto $x_0\in A$, decimos que f es contínua en x_0 si para todo $E(f(x_0),\epsilon)$ existe un $E(x_0,\delta)$ tal que $f(E(x_0,\delta)\cap A)\subseteq E(f(x_0),\epsilon)$

Equivaléntemente, la definición clásica de continuidad: Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$, si

$||x - x_0|| < \delta$ entonces $||f(x) - f(x_0)|| < \epsilon$

De la definición se ve que si x_0 es un punto aislado de A, entonces f es contínua en x_0 (basta tomar el δ que hace que el punto sea aislado).

Por otro lado, si x_0 es un punto de acumulación de A, entonces son equivalentes que f sea contínua en x_0, con que se cumplan simultáneamente las 3 siguientes cosas

1. Existe $f(x_0)$ (es decir $x_0 \in A$)
2. Existe $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$
3. $f(x_0) = l$

4.2.1. Propiedades de funciones contínuas

Son contínuas en todo su dominio las siguientes funciones

1. Funciones polinómicas, de cualquier cantidad de variables. Ejemplo: $x^2 + 3xy + z^3$ es una función contínua en $\mathbb{R}^3$
2. La función exponencial $f(x) = e^x$ es contínua en $\mathbb{R}$
3. Las funciones trigonométricas $\sin(x)$ y $\cos(x)$ son contínuas en $\mathbb{R}$

Además, supongamos que las funciones $g, h : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son contínuas en $x_0 \in A$.

Entonces son contínuas en x_0 las siguientes funciones

1. $f = g \pm h$

Si además $m = 1$, es decir se trata de campos escalares, tiene sentido multiplicarlos, y también dividirlos en los puntos donde no se anula el denominador, y son contínuas en $x_0 \in A$ las funciones

1. $f = g \cdot h$
2. $f = g/h$ (si $h(x_0) \neq 0$)

Y por último es útil el siguiente teorema:

Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es contínua en x_0 y $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es contínua en $y_0 = f(x_0)$, y si existe la función compuesta $h = g \circ f$ (es decir $f(A) \subseteq B$), entonces h es contínua en x_0.

Por último, si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene funciones coordenadas $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ entonces f es contínua en x_0 si y solo sí cada componente f_i es contínua en x_0 para todo $1 \leq i \leq m$.

5. Derivabilidad

5.1. Derivada de función vectorial

Dada la función vectorial $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in A^\circ$ definimos su **derivada** en t_0 como

$$f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

si dicho límite existe. Sinó, se dice que f no es derivable en dicho punto.

Si es derivable en todo el dominio tiene sentido definir la función derivada $f'(t)$ que a cada punto le asigna la derivada de la función, y decimos que f es derivable.

Observación: Si $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$ entonces f es derivable si y sólo si todos sus funciones coordenadas f_i son derivables, y el valor de la derivada viene dada por $g'(t) = (g_1'(t), g_2'(t), \ldots, g_n'(t))$

Interpretación geométrica:

Si $f(t)$ es la parametrización de una curva, entonces $f'(t_0)$ es un vector tangente a la curva en el punto $f(t_0)$

En dicho caso existe **recta tangente** a la curva, la cual podemos parametrizar como

$$r(\lambda) = f(t_0) + \lambda f'(t_0)$$

Y también existe el **plano normal**, que podemos expresarlo con su ecuación cartesiana de la forma

$$(x - f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 0$$

5.2. Derivadas parciales, direccionales, y respecto a un vector

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in A^\circ$, y sea $v \in \mathbb{R}^n$. Entonces definimos la derivada de f en x_0 respecto al vector v como

$$f'_v(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

si dicho límite existe.

Otras notaciones equivalente son

$f'_v(x_0) = f'(x_0, v) = D_v f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$

Si v es un versor, es decir si $||v|| = 1$ decimos que se trata de una **derivada direccional**, y si además v es un versor canónico de $\mathbb{R}^n$, es decir $v = e_i = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{i-ésima}}, 0, \ldots, 0)$ decimos que se trata de una **derivada parcial**.

Teorema: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $x_0 \in A^\circ$ y $v \in \mathbb{R}^n$, tal que $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Entonces f es derivable en x_0 respecto a v si y sólo sí cada función coordenada es derivable en x_0 respecto a v, y en dicho caso se tiene $f'_v(x_0) = (f'_{1v}(x_0), f'_{2v}(x_0), \ldots, f'_{mv}(x_0))$, es decir que podemos derivar coordenada a coordenada.

5.2.1. Propiedad de homogeneidad

La propiedad de homogeneidad es el siguiente teorema: Si existe la derivada direccional $f'(x_0, v)$ y $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, entonces $f'(x_0, kv) = kf'(x_0, v)$.

Demostración:

$$f'(x_0, kv) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hkv) - f(x_0)}{h}$$

$$= k \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hkv) - f(x_0)}{hk}$$

Sustituyo $u = hk$ y cuando $h \to 0$ se tiene que $h_2 \to 0$, luego

$$= k \lim_{u \to 0} \frac{f(x_0 + uv) - f(x_0)}{u}$$

$$= kf'(x_0, v)$$

Corolarios:

1. $f'(x_0, -v) = -f'(x_0, v)$
2. $f'(x_0, v) = ||v||f'(x_0, \hat{v})$ (donde $\hat{v} = \frac{v}{||v||}$)

5.2.2. Derivadas parciales sucesivas

Las derivadas parciales podemos pensarlas como funciones cuyo dominio es el conjunto sobre el que quedan definidas, y como tales tiene sentido volver a derivarlas, respecto a la misma u otra variable.

5.2.3. Teorema de Schwarz

Sea el campo escalar $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si existen $f''_{e_i e_j}, f''_{e_j e_i}$ y son contínuas en un entorno del punto $x_0 \in A^\circ$ entonces

$$f''_{e_i e_j}(x_0) = f''_{e_j e_i}(x_0)$$

es decir las derivadas parciales mixtas son iguales.

5.2.4. Función clase C^1

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con A abierto, es tal que posee todas sus derivadas parciales y son contínuas en A, entonces decimos que f es de clase C^1 y lo denotamos $f \in C^1$.

Del mismo modo si tiene todas sus derivadas parciales segundas y son contínuas decimos que $f \in C^2$.

Análogamente se dice que $f \in C^n$ si sus derivadas parciales de orden n existen y son contínuas en el abierto A.

5.3. Curvas y Superficies

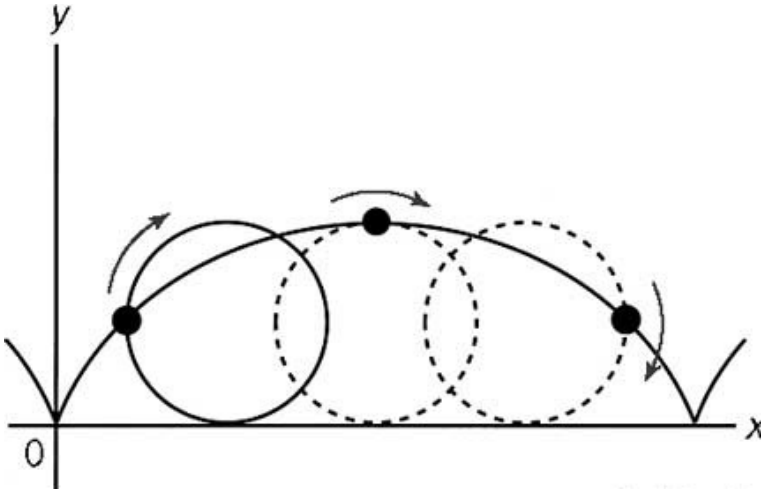
Un subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ decimos que es una **curva** si existe una función vectorial contínua $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, tal que $g([0, 1]) = C$. A la función g se la llama parametrización de la curva.

Sea $g(t)$ la parametrización de una curva, si además $g \in C^1$ y existe $g'(t_0) \neq \vec{0}$ decimos que se trata de una **curva regular** en $g(t_0)$

Un subconjunto Σ de $\mathbb{R}^3$ decimos que es una **superficie** si existe un campo vectorial contínuo $g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con A conexo, tal que $g(A) = S$. A la función g se le dice la parametrización de la superficie Σ.

Sea $g(u, v)$ la parametrización de una superficie, si además $g \in C^1$ y existe $g'_u(u_0, v_0) \wedge g'_v(u_0, v_0) \neq 0$ decimos que se trata de una **superficie regular** en $g(u_0, v_0)$

Ejemplo: La cicloide es la curva que se genera al hacer girar una circunferencia de radio $a > 0$ sobre el eje de las x, como se ilustra en la siguiente imagen.



Dicha curva puede parametrizarse por

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$g(t) = a(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$

la cual es derivable en todo su dominio, su derivada es

$g'(t) = a(1 - \cos(t), \sin(t))$

Estudiemos algunos de sus valores

$X_0 = g(0) = (0, 0)$

$X_1 = g(\pi/2) = a(\pi/2 - 1, 1)$

$X_2 = g(\pi) = a(\pi, 2)$

$X_3 = g(2\pi) = a(2\pi, 0)$

Veamos cuales de ellos son regulares

$g'(0) = a(0,0)$

$g'(\pi/2) = a(1,1)$

$g'(\pi) = a(2,0)$

$g'(2\pi) = a(0,0)$

Por lo tanto los puntos X_1 y X_2 son regulares, y los puntos X_0 y X_3 no lo son (se dice que son singulares). Además en X_2 el vector tangente es "horizontal"por lo tanto la recta tangente en dicho punto es la recta horizontal de ecuación $y = 2a$

6. Diferenciabilidad

En el TP04 vimos varios ejemplos de funciones derivables (en toda dirección) pero no contínuas. La idea de esta sección es generalizar la idea de derivada de Análisis 1 de forma tal que este nuevo concepto, que llamaremos diferenciabilidad, sí que implique continuidad, así como lo hacía el concepto de derivabilidad en una variable.

Recordemos la definición de función (escalar) derivable en un punto: Una función escalar $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $x_0 \in A^\circ$ si existe el siguiente límite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

equivalentemente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h} = 0.$$

O sea es derivable si existe una función escalar $\mu : A \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = h\mu(h)$$

con $\lim_{h \to 0} \mu(h) = 0$.

Por otro lado, la expresión $f'(x_0)h$ es una transformación lineal $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \to T(h)$, y por lo tanto podemos decir que f es derivable si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un campo escalar $\mu : A \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = T(h) + h\mu(h)$$

con $\lim_{h\to 0} \mu(h) = 0$

Ahora sí estamos en condiciones de definir función diferenciable en un punto:

6.1. Definición

Un campo vectorial $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice **diferenciable** en $x_0 \in A^\circ$ si existe una trasnformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y un campo vectorial $\mu : A \to \mathbb{R}^m$ tales que

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = T(h) + ||h||\mu(h)$$

con $\lim\limits_{h\to 0} \mu(h) = 0$

Esta definición tiene concecuencias importantes. Veremos algunas de ellas en las siguientes subsecciones.

6.2. Diferenciabilidad implica Derivabilidad

Teorema: Sea el campo vectorial $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en x_0, entonces f es derivable en x_0 con derivada $f'(x_0, \hat{v}) = Df(x_0) \cdot \hat{v}$.

Demostración:

Como f es diferenciable en x_0 existen una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y un campo vectorial $\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tales que

$f(x_0 + h) - f(x_0) = T(h) + ||h||\mu(h)$

Considerando $h = k\hat{v}$

$f(x_0 + k\hat{v}) - f(x_0) = T(k\hat{v}) + ||k\hat{v}||\mu(k\hat{v})$

$f(x_0 + k\hat{v}) - f(x_0) = kT(\hat{v}) + |k|\mu(k\hat{v})$

dividiendo por k y tomando límite $k \to 0$

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0 + k\hat{v}) - f(x_0)}{k} = \lim_{k\to 0} T(\hat{v}) + \frac{|k|}{k}\mu(k\hat{v})$$

Y como $T(\hat{v})$ no depende de k, y como $\frac{|k|}{k}$ es acotada y $\mu \to 0$, se tiene

$f'(x_0, \hat{v}) = T(\hat{v})$

Lo cual nos dice que existen todas las derivadas direccionales, e incluso nos da una forma de calcularlas.

Corolario: Sea un campo vectorial $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $x_0 \in A^\circ$, y sea T una transformación lineal que cumple lo pedido, entonces dicha transformación lineal es única, y además $T(\hat{e_i}) = f'(\vec{x_0}, \hat{e_i})$.

En otras palabras si $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ entonces la matriz asociada a la transformaicón lineal T respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, se expresa poniendo en sus columnas las derivadas parciales de f en x_0, o sea

$$[T] = \begin{pmatrix} f'_{1,e_1} & f'_{1,e_2} & \cdots & f'_{1,e_n} \\ f'_{2,e_1} & f'_{2,e_2} & \cdots & f'_{2,e_n} \\ \cdots & & & \\ f'_{m,e_1} & f'_{m,e_2} & \cdots & f'_{m,e_n} \end{pmatrix}$$

Demostración:

Es inmediata: por el teorema anterior

$f'(\vec{x_0}, \hat{v}) = T(\hat{v})$

haciendo $v = e_i$ tenemos

$f'(\vec{x_0}, \hat{e_i}) = T(\hat{e_i})$

y como las derivadas parciales de existir son únicas (son un límite) entonces la transformación lineal de existir es única.

Definición:

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x_0 \in A^\circ$, entonces a la transformación lineal T la vamos a llamar el **diferencial** de f en x_0, y la vamos a denotar df.

A la matriz $[T]$ asociada a la transformación lineal $df(x_0)$ o df_{x_0} la llamamos **matriz jacobiana** de f en x_0, y la denotamos $Df(x_0)$ o Df_{x_0}.

6.3. Diferenciabilidad implica Continuidad

Teorema: Sea el campo vectorial $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $x_0 \in A^\circ$, entonces f es contínua en x_0.

Demostración:

Como f es diferenciable en x_0 existen una (única) transformación lineal $df : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y un campo vectorial $\mu : A \to \mathbb{R}^m$ tales que

$f(x_0 + h) - f(x_0) = T(h) + ||h||\mu(h)$

Tomando límite $h \to 0$

$\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \underbrace{T(h)}_{\to 0} + \underbrace{||h||}_{\to 0} \underbrace{\mu(\vec{h})}_{\to 0}$

O sea

$\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$

$\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$

Sustituyendo $x = x_0 + h$ queda $h = x - x_0$ se tiene que cuando $h \to 0$ entonces $x \to x_0$, reemplazando:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

lo cual nos dice que el límite existe y es igual al valor de la función en el punto, o sea que f es contínua en x_0.

6.4. Gradiente

Definición: Sea el campo escalar $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y $x_0 \in A^\circ$, si existen las derivadas parciales de f en x_0, definimos el **vector gradiente** $\nabla f(x_0)$ como

$$\nabla f(x_0) = (f'_{e_1}(x_0), f'_{e_2}(x_0), \ldots, f'_{e_n}(x_0))$$

Es decir es el vector cuyos componentes son las derivadas parciales.

El teorema de diferenciable implica derivable nos dice en este caso que si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x_0 \in A^\circ$, y $v \in \mathbb{R}^n$ es un versor, entonces las derivadas direccionales las podemos calcular como

$$f'_v(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

6.5. El gradiente es normal al conjunto de nivel

Sea el campo escalar $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in A^\circ$, y sea $k \in \mathbb{R}$, entonces $\nabla f(x_0)$ es perpendicular al conjutno de nivel k de f que denotamos $C_k(f)$

Demostración:

El conjunto de nivel k de f son los $x \in A$ tales que

$f(x) = k$

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ la parametrización de una curva incluída en el conjunto de nivel, es decir que $g([a, b]) \subseteq C_k(f) \subseteq A$, tal que $g(t_0) = x_0$ y $g'(t_0) \neq 0$.

Entonces podemos componer g con f y se tiene que

$f(g(t)) = k$

Aplicando la regla de la cadena (que se ve en el TP06) se tiene

$\nabla f(g(t)) \cdot g'(t) = 0$

O sea que $\nabla f(x_0) \cdot g'(t_0) = 0$, es decir $f(x_0) \perp g'(t_0)$. Pero $g'(t_0)$ es un vector director de la recta tangente a la curva que está incluída en el conjunto de nivel, es decir es paralelo al conjunto de nivel, y por lo tanto el gradiente es normal al conjunto de nivel.

6.6. Direcciones de derivada máxima, mínima y nula

Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en x_0 y $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces:

Existe una única dirección de máxima derivada direccional y es $r_{max} = \frac{\nabla f(x_0)}{||\nabla f(x_0)||}$. El valor de dicha derivada es $||\nabla f(x_0)||$.

Existe una única dirección de mínima derivada direccional y es $r_{min} = -r_{max}$. El valor de dicha derivada es $-||\nabla f(x_0)||$.

Además, si $n = 2$ existen exactamente dos direcciones de derivada direccional nula, y si $\nabla f(x_0) = (a, b)$ entonces las mismas son $r_1 = \frac{(-b,a)}{||(-b,a)||}$ y $r_2 = -r_1$

Demostración:

Como f es diferenciable en x_0, por el teorema sabemos que es derivable

y

$$f'_v(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

Pero

$$\nabla f(x_0) \cdot v = \underbrace{||\nabla f(x_0)||}_{cte} \underbrace{||v||}_{=1} \underbrace{\cos(\phi)}_{\in[-1,1]}$$

donde ϕ es el ángulo entre $\nabla f(x_0)$ y v.

Para que dicha derivada sea máxima se requiere $\cos(\phi) = 1$, por lo tanto el valor máximo que toma es $||\nabla f(x_0)||$, y esto ocurre cuando el ángulo es 0, es decir cuando $v = r_{max} = \frac{\nabla f(x_0)}{||\nabla f(x_0)||}$

Por la propiedad de homogeneidad, la mínima derivada direccional es $-||\nabla f(x_0)||$ y ocurre en la dirección $v = r_{min} = -r_{max}$

Finalmente, en $\mathbb{R}^2$, buscamos las direcciones de derivada direccional nula, es decir $f'_v(x_0) = 0 = \nabla f(x_0) \cdot v$

Es decir estamos buscando los versores normales a $\nabla f(x_0)$.

Dado el vector $\nabla f(x_0) = (a, b)$, una forma fácil de encontrar un vector normal es intercambiar las coordenadas y cambiarle el signo a una. Luego dividimos por la norma y obtuvimos un versor normal. El otro es símplemente el opuesto aditivo.

6.7. C^1 implica diferenciable

Teorema: Sea el campo escalar $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con A abierto. Si $f \in C^1$, entonces f es diferenciable en todo $x \in A$.

Observación: Una función puede ser diferenciable y aún así $f \notin C^1$, por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

7. Funciones Compuestas e Implícitas

7.1. Función definida implícitamente

Dada una función $F : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, decimos que la ecuación $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ define implícitamente a y como función de $x_1, \ldots, x_n$ en B si existe una función $f : B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0$, para $B \subseteq A_y$ donde A_y es la proyección de A sobre $x_1, \ldots, x_n$

Ejemplo: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. La ecuación correspondiente es $x^2 + y^2 - z = 0$. Como existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ tal que $F(x, y, f(x, y)) = 0$, la ecuación define implícitamente a z como función de x, y.

Ejemplo 2: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. La ecuación correspondiente es $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Sea $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Como existe $f : D_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$ tal que $F(x, y, f(x, y)) = 0$, la ecuación define implícitamente a z como función de x, y.

Notar que globálmente la relación entre x, y y z no es funcional, pues por ejemplo tanto el $(0, 0, 1)$ como el $(0, 0, -1)$ satisfacen la ecuación, pero $f(0, 0)$ debe tener una única imagen. En particular, la función definida implícitamente no tiene porqué ser única, otra función definida implícitamente por la misma ecuación es $g : D_2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

7.2. Teorema de Cauchy-Dini

Sea $F : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ con A abierto y $F \in C^1$, y sea la ecuación $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.

Sea además $P = (a_1, \ldots, a_n, y_0) \in A$, tal que $F(P) = 0$, y $F'_y(P) \neq 0$.

Entones la ecuación define implícitamente a y como función de $x_1, \ldots, x_n$ en un entorno de $P_y = (a_1, \ldots, a_n)$, es decir existe $f : A_y \cap E(P_y, \delta) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0$, y además f es diferenciable en P_y y

$$f'_{x_i}(P_y) = -\frac{F'_{x_i}(P)}{F'_y(P)}$$

Equivaléntemente, podemos calcular el gradiente $\nabla f(P_y)$ de la siguiente manera

$$\nabla f(P_y) = \left(-\frac{F'_{x_1}(P)}{F'_y(P)}, -\frac{F'_{x_2}(P)}{F'_y(P)}, \ldots, -\frac{F'_{x_n}(P)}{F'_y(P)} \right)$$

$$= -\frac{1}{F'_y(P)} \left(F'_{x_1}(P), F'_{x_2}(P), \ldots, F'_{x_n}(P) \right)$$

7.3. Función Compuesta

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ tales que $f(A) \subseteq B$.

Entonces existe la función $h : A \to \mathbb{R}^p$ tal que $h(x) = g(f(x))$.

Decimos que h es la **función compuesta** que resulta de componer f con g y lo denotamos como $h = g \circ f$.

7.4. Teorema de la Regla de la Cadena

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $x_0 \in A^\circ$ y f diferenciable en x_0

Y sea $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, con $y_0 = f(x_0) \in B^\circ$, y g diferenciable en y_0.

Entonces existe la función compuesta $h : A \to \mathbb{R}^p$, la misma es diferenciable en x_0, y además el diferencial de h en x_0 es igual a la composición de los diferenciales de f en x_0 con el de g en y_0, es decir

$dh(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0)$

También lo podemos expresar matricialmente: con respecto a las matrices jacobianas $Dh(x_0)$, $Dg(y_0)$ y $Df(x_0)$ se tiene que

$Dh(x_0) = Dg(y_0) \cdot Df(x_0)$

donde ahora el producto es el matricial.

8. Polinomio de Taylor y Extremos

8.1. Polinomio de Taylor

Vamos a definir el polinomio de Taylor de un campo escalar $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, de segundo grado en un punto $(x_0, y_0) \in A$.

Para eso primero recordemos que el de primer grado es

$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

El polinomio de taylor de segundo grado en dicho punto es

$T_1(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) +$

$+\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2\right]$

8.2. Máximos y mínimos de una función

Llamamos **extremos** a los máximos y mínimos que puede alcanzar una función.

Sea el campo escalar $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y $x_0 \in A$, entonces:

$f(x_0)$ es máximo absoluto de f si $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in A$

$f(x_0)$ es mínimo absoluto de f si $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in A$

$f(x_0)$ es máximo relativo de f si $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in A \cap E(x_0, \delta)$ para algún $\delta > 0$

$f(x_0)$ es mínimo relativo de f si $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in A \cap E(x_0, \delta)$ para algún $\delta > 0$

Todos los extremos se definieron en sentido amplio. La definición en sentido estricto es análoga pero cambiando $\leq$ por $<$ y $\geq$ por $>$, y analizando $A - \{x_0\}$ para extremos absolutos, y $(A - \{x_0\}) \cap E(x_0, \delta)$ para extremos relativos.

Definición:

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un **punto crítico** es un elemento $x_0 \in A$ tal que o bien f no es diferenciable en él, o bien es diferenciable pero $\nabla f(x_0) = 0$.

8.2.1. Criterio de la derivada primera

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$. Si $f(x_0)$ es punto crítico, entonces $\nabla f(x_0) = 0$.

Es decir, para que esta función presente un extremo $f(x_0)$ es necesario que $\nabla f(x_0) = 0$.

Demostración:

Sea $g(t) = x_0 + tv$ para un versor $v \in \mathbb{R}^n$, y considero la composición $h(t) = f(g(t))$.

Cláramente $g(0) = x_0$. Como f es diferenciable en x_0 y g es diferenciable en 0, la compuesta h es diferenciable en 0, y podemos usar la regla de la cadena y obtenemos

$h'(0) = \nabla f(g(0))g'(0)$

Pero si f presentaba extremo en x_0 entonces h presenta extremo en 0, y por el criterio de la derivada primera (de Análisis 1) sabemos que debe cumplirse

$h'(0) = 0.$

O sea que

$\nabla f(g(0)) \cdot g'(0) = 0.$

Pero $g'(0) = v$, luego nos queda

$\nabla f(x_0) \cdot v = 0.$

y como f es diferenciable en x_0 nos queda

$\nabla f(x_0) \cdot v = f'_v(x_0) = 0$

En particular tomando v un versor çanónico"de $\mathbb{R}^n$ vemos que todas las derivadas parciales son nulas, y por lo tanto $\nabla f(x_0) = 0$ como queríamos probar.

8.2.2. Matriz Hessiana

Dado el campo escalar $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, llamamos **matriz Hessiana** a la matriz jacobiana del gradiente de f. Es decir:

$$Hf = \begin{pmatrix} f''_{e_1e_1} & f''_{e_1e_2} & \dots & f''_{e_1e_n} \\ f''_{e_2e_1} & f''_{e_2e_2} & \dots & f''_{e_2e_n} \\ \dots \\ f''_{e_ne_1} & f''_{e_ne_2} & \dots & f''_{e_ne_n} \end{pmatrix}$$

Observación: Por el teorema de Schwarz, la matriz Hessiana es siempre simétrica.

8.2.3. Criterio de la derivada segunda

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$ y x_0 punto crítico, es decir $\nabla f(x_0) = 0$.

Entonces si la matriz hessiana en x_0 es **definida positiva**, es decir sus autovalores son todos positivos, la función presenta un mínimo relativo $f(x_0)$, y si está **definida negativa**, es decir sus autovalores son todos negativos, la función presenta un máximo relativo $f(x_0)$.

Una forma de ver si la matriz está definida positiva es utilizando el **criterio de Sylvester**, que explicamos para el caso $n = 3$, es decir en $\mathbb{R}^3$.

Sea la matriz hessiana de f:

$$Hf = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix}$$

Consideramos los **menores principales**, es decir los siguientes determinantes:

$$H_1 = \left| f''_{xx} \right|$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix}$$

Entonces si $H_1, H_2, H_3 > 0$ la matriz está definida positiva.

Y si $H_1 < 0$, $H_2 > 0$, $H_3 < 0$ la matriz está definida negativa.

Si algún determinante da 0 el criterio no decide, y en cualquier otro caso hay punto de ensilladura, es decir no se produce extremo.

8.3. Extremos condicionados

Supongamos que queremos maximizar un campo escalar $f(x, y)$, sujeto a una restricción $g(x, y) = 0$.

Un método consiste, cuando es posible, en despejar x o y (o alguna expresión) de la ecuación $g(x, y) = 0$ de forma tal de reemplazarla en la función $f(x, y)$ para que quede en función de una variable.

Otra posibilidad sería parametrizar la curva $g(x, y) = 0$, digamos mediante la función vectorial $r(t)$, luego componer $h = f \circ r$ y maximizar dicha compuesta $h(t) = f(r(t))$ que es una función de una variable.

Pero si ninguno de los métodos anteriores funciona, debemos recurrir a los **multiplicadores de Lagrange**:

Definimos la función lagrangiana:

$L(\lambda, x, y) = \lambda g(x, y) + f(x, y)$

Los puntos críticos (restringidos) los hallamos calculando el gradiente e igualando a cero:

$\nabla L(\lambda, x, y) = (0, 0, 0)$

$g(x, y) = 0$

$\lambda g'_x + f'_x = 0$

$\lambda g'_y + f'_y = 0$

Para cada punto crítico restringido podemos analizar si es extremo analizando geométricamente la función, o usando el hessiano restringido:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & f''_{xx} & f''_{xy} \\ g'_y & f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

Si $H_3 < 0$ hay mínimo relativo

Si $H_3 > 0$ hay máximo relativo.

En general, si hay m restricciones, se consideran los menores principales de tamaño $i \geq 2m + 1$.

Si m es par y $H_i > 0$ para todo i hay mínimo relativo. Y si $H_i < 0, H_{i+1} > 0, H_{i+2} < 0, \ldots$ hay máximo relativo.

Si m es impar y $H_i < 0$ para todo i hay mínimo relativo. Y si $H_i >$

$0, H_{i+1} < 0, H_{i+2} > 0, \ldots$ hay máximo relativo.

Ejemplo: Analizar los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeto a $x = 0$

$L(\lambda, x, y) = \lambda x + x^2 + y^2$

$\nabla L(\lambda, x, y) = (x, \lambda + 2x, 2y) = (0, 0, 0)$

$x = 0$

$\lambda + 2x = 0$

$2y = 0$

El único punto crítico es $(\lambda, x, y) = (0, 0, 0)$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $H_3 = -2 < 0$ hay mínimo relativo $f(0, 0) = 0$

9. Integral de Línea y Función Potencial

9.1. Integral de Riemann

Recordemos la definición de la integral de Riemann:

Sea $[a, b] \in \mathbb{R}$ un intervalo compacto, y sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Sea f una función acotada en $[a, b]$.

Notamos

$m_i = \text{ínf}_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

$\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$

Las sumas superior e inferior de Riemann son

$S_p(f) = \Sigma_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i$

$s_p(f) = \Sigma_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i$

Luego

$\overline{\int_a^b} f dx = \text{ínf}_{p\ part} S_p(f)$

$\underline{\int_a^b} f dx = \sup_{p\ part} s_p(f)$

donde el ínfimo el el supremo se calcula sobre todas las particiones posibles.

Si son iguales, se nota $\int_a^b f dx$ y se dice que f es Riemann-integrable en $[a, b]$, y lo denotamos $f \in R$

9.2. Curva regular a trozos, curva de jordan

Una curva $C \in \mathbb{R}^n$ decimos que es **regular a trozos** si puede escribirse como $C = \cup_{i=1}^{k} C_i$ donde cada C_i es una curva regular, y el extremo final de una coincide con el inicial de la siguiente.

Es decir si cada curva C_i está parametrizada por $g_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^n$, entonces $g_i(b_i) = g_{i+1}(a_{i+1})$

Una curva C es **simple** si admite una parametrización inyectiva.

Una curva C es **cerrada** si admite una parametrización $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $g(a) = g(b)$

Una curva C se dice cerrada simple, o **curva de Jordan**, si admite una parametrización $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tal que es inyectiva en $[a, b)$ y $g(a) = g(b)$

9.3. Integral de línea

Dada una curva $C \in \mathbb{R}^n$ con parametrización $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, y dado un campo escalar $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínuo, tal que $C \in A^\circ$, definimos la integral de f sobre C como

$\int_C f dc = \int_a^b f(g(t))||g'(t)||dt$

Dada la misma curva C con misma parametrización g, y dado el campo vectorial $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínuo, tal que $C \in A^\circ$, definimos la integral de f sobre C en este caso también llamado **circulación** como

$\int_C f \cdot dc = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt$

En ambos casos decimos que se trata de la integral sobre la curva C desde $g(a)$ hasta $g(b)$

9.4. Campos conservativos

Dado un campo vectorial $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, con A abierto y $f \in C^1$, podemos preguntarnos si en realidad se trata del gradiente de un campo escalar $\phi : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\phi \in C^2$, tal que $\nabla\phi = f$.

En dicho caso, decimos que f es un **campo conservativo**, y que ϕ es su **función potencial**.

Observación: No todos los campos vectoriales son conservativos.

Por ejemplo $f(x, y) = (-y, x)$ no es conservativo. Si lo fuera, como $f \in C^1$ se tendría una $\phi \in C^2$ tal que $\nabla\phi = f$, pero en ese caso sería $\phi'_x = -y$ y $\phi'_y = x$. Se cumplen las hipótesis del teorema de Schwarz, por lo tanto $\phi''_{xy} = \phi''_{yx}$ con lo cual llegamos a $-1 = 1$ lo cual es absurdo, y por lo tanto f no es un campo conservativo.

Es fácil construir ejemplos de campos conservativos, símplemente elegimos un campo escalar $\phi \in C^2$, y su gradiente es un campo conservativo. Por ejemplo si $\phi(x, y) = x^2 + y^2$ entonces se tiene que $\nabla\phi(x, y) = f(x, y) = (2x, 2y)$ es un campo conservativo, cuya función potencial es ϕ.

9.5. Teorema de la independencia del camino

Sea el campo vectorial conservativo $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, y sea $\phi : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ su función potencial.

Sea $C \subset A^\circ$ una curva regular con parametrización $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, entonces

$\int_C f \cdot dc = \phi(B) - \phi(A)$

Demostración:

Queremos calcular $\int_C f \cdot dc = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)dt$

Como $f = \nabla\phi$ se tiene

$\int_C f \cdot dc = \int_a^b \nabla\phi(g(t)) \cdot g'(t)dt$

Ahora consideramos la función compuesta $h = \phi \circ g$, $h(t) = \phi(g(t))$. La misma existe puesto que la curva está en el dominio de ϕ.

Como $g \in C^1$ por ser la parametrización de una curva regular, y $\phi \in C^2$ por ser función potencial de f, ambas son diferenciables, y podemos aplicar el teorema de la regla de la cadena

$h'(t) = \nabla\phi(g(t)) \cdot g'(t)$

reemplazando en la integral

$\int_C f \cdot dc = \int_a^b h'(t)dt$

y por el teorema fundamental del cálculo de Análisis 1

$\int_a^b h'(t)dt = h(b) - h(a)$

Pero $h = \phi(g(t))$, finalmente

$\int_C f \cdot dc = \phi(g(b)) - \phi(g(a))$

Es decir que la integral de f sobre la curva C no depende del camino, sino sólamente de los puntos inicial $g(a)$ y final $g(b)$ de la curva.

Corolario:

Si f es conservativo, la integral sobre cualquier curva cerrada da cero.

Demostración:

Como C es cerrada $g(a) = g(b)$, y como f es conservativo se tiene

$\int_C f \cdot dc = \phi(g(b)) - \phi(g(a)) = \phi(g(a)) - \phi(g(a)) = 0$

9.6. Condición necesaria para la existencia de función potencial

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ conservativo con $f \in C^1$, entonces su matriz jacobiana Df es contínua y simétrica.

Dicho de otra forma, si $f \in C^1$ tiene matriz jacobiana Df que o bien no es continua, o bien no es simétrica (o ninguna de las dos), entonces f no puede ser un campo conservativo.

Demostración:

Como $f \in C^1$ es conservativo, existe $\phi : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $\phi \in C^2$ y $\nabla\phi = f$.

Como $f \in C^1$ es claro que su matriz jacobiana debe ser contínua.

Además por el teorema de Schwarz $\phi''_{x_i x_j} = \phi''_{x_j x_i}$, lo cual prueba que la matriz jacobina debe ser simétrica.

9.7. Condición de suficiencia para la existencia de función potencial

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que cumple la condición necesaria para que exista función potencial (es decir tiene Df contínuo y simétrico). Si además A es *símplemente conexo*, entonces f es conservativo.

Observación: La condición de suficiencia me garantiza que si la misma se cumple, entonces el campo es conservativo. Pero no garantiza que si la misma no se cumple entonces el campo no sea conservativo. Hay funciones que no cumplen la condición de suficiencia y aún así son conservativos, por ejemplo sea $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $f : A \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2x, 2y)$. Cláramente A no es símplemente conexo. Sin embargo existe $\phi : A \to \mathbb{R}$, $\phi \in C^2$, $\phi(x,y) = x^2 + y^2$, y $f = \nabla\phi$, es decir el campo f es conservativo.

9.8. Masa, momentos, centro

Veamos algunas fórmulas para el cálculo de masa, momentos y centro, sobre curvas.

Sea $g : [a,b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la parametrización regular de la curva $C \subset \mathbb{R}^2$.

Sea $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua la densidad de masa.

Podemos calcular la masa

$M = \int_C \delta dc$

Momentos estáticos respecto a los ejes coordenados

$M_x = \int_C y\delta dc$

$M_y = \int_C x\delta dc$

Centro de masa:

$G = \frac{1}{M}(M_y, M_x)$

Momentos de inercia respecto a los ejes coordenados

$I_x = \int_C y^2\delta dc$

$I_y = \int_C x^2\delta dc$

Sea $g : [a,b] \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la parametrización regular de la curva $C \subset \mathbb{R}^3$.

Sea $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la densidad de masa.

Podemos calcular la masa

$M = \int_C \delta dc$

Momentos estáticos respecto a los planos coordenados

$M_{xy} = \int_C z\delta dc$

$M_{xz} = \int_C y\delta dc$

$M_{yz} = \int_C x\delta dc$

Centro de masa:

$G = \frac{1}{M}(M_{yz}, M_{xz}, M_{xy})$

Momentos estáticos respecto a ejes coordenados

$M_x = \int_C \sqrt{y^2 + z^2}\delta dc$

$M_y = \int_C \sqrt{x^2 + z^2}\delta dc$

$M_z = \int_C \sqrt{x^2 + y^2}\delta dc$

Momentos de inercia respecto a los ejes coordenados

$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\delta dc$

$I_y = \int_C (x^2 + z^2)\delta dc$

$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\delta dc$

Momentos de inercia respecto a los planos coordenados

$I_{xy} = \int_C z^2\delta dc$

$I_{xz} = \int_C y^2\delta dc$

$I_{yz} = \int_C x^2\delta dc$

Más generalmente:

El **momento estático** respecto a una recta (o plano) es la integral de la distancia a la recta (o plano) por la densidad de masa.

El **momento de inercia** respecto a una recta (o plano) es la integral de la distancia al cuadrado a la recta (o plano) por la densiad de masa.

10. Integrales Múltiples

Definición: Una región elemental tipo I del plano es un subconjunto $R \subseteq \mathbb{R}^2$ de la forma

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$

Análogamente, una región elemental tipo II es de la forma

$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b, f_1(y) \leq x \leq f_2(y)\}$

En ambos casos f_1, f_2 son funciones contínuas en el compacto $[a, b]$, y por lo tanto acotadas, por lo tanto el conjunto R también es acotado, y como es cerrado, resulta compacto.

Una región elemental tipo I del espacio es un subconjunto $R \subseteq \mathbb{R}^3$ de la forma

$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(y), g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$

En total hay $3! = 6$ tipos de regiones elementales en $\mathbb{R}^3$, que se corresponden con las permutaciones de las tres letras x, y, z ya que consiste en ordenar las variables. En todos los casos las funciones se asumen contínuas, y por lo tanto el conjunto R resulta compacto.

De nuevo f_1, f_2, g_1, g_2 son funciones contínuas, y por lo tanto acotadas.

10.1. Teorema de Fubini en $\mathbb{R}^2$

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua, con A región tipo 1, de la forma $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ entonces

$\iint_A f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} f(x, y)dy$

10.2. Teorema de cambio de variables

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua, y $g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ biyectiva, $g \in C^1$, y $(x, y) = g(u, v)$, y sea $A = g(B)$, entonces

$$\iint_{A=g(B)} f(x, y)dxdy = \iint_B f(g(u, v))||det(Dg(u, v))||dudv$$

Análogamente, sea $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ contínua, y $g : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

biyectiva, $g \in C^1$, y $(x, y, z) = g(u, v, w)$, y sea $A = g(B)$, entonces

$$\iiint_{A=g(B)} f(x, y, z)dxdydz = \iiint_B f(g(u, v, w))||det(Dg(u, v, w))||dudvdw$$

10.3. Coordenadas cartesianas y polares en $\mathbb{R}^2$

10.3.1. Cartesianas

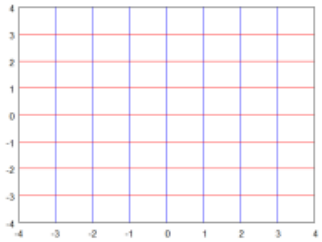
Corresponde a la función identidad de $\mathbb{R}^2$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$g(u, v) = (u, v)$

En este caso se tiene

$|det(Dg)| = 1$



10.3.2. Polares

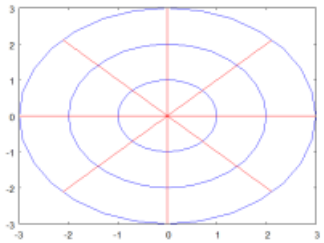
Corresponde al campo vectorial

$g : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$

$g(\rho, \phi) = (\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi))$

En este caso se tiene

$|det(Dg)| = \rho$



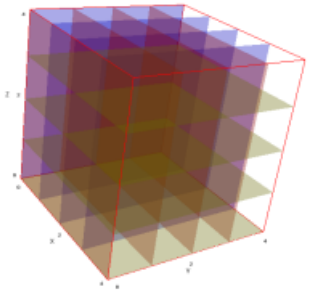
10.4. Coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas en $\mathbb{R}^3$

10.4.1. Cartesianas

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$g(u, v, w) = (u, v, w)$

$|det(Dg)| = 1$



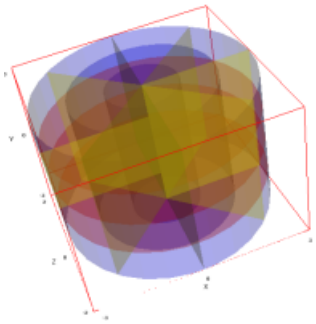
10.4.2. Cilíndricas

Sobre el eje z corresponde a la función

$g : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$g(\rho, \phi, z) = (\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi), z)$

$|det(Dg)| = \rho$



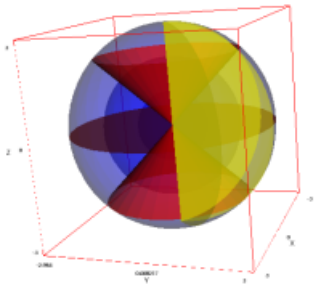
10.4.3. Esféricas

También puede orientarse de distintas formas, la estándard es

$g : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$

$g(\rho, \alpha, \beta) = (\rho \cos(\alpha) \sin(\beta), \rho \sin(\alpha) \sin(\beta), \rho \cos(\beta))$

$|det(Dg)| = \rho^2 \sin(\beta)$



10.5. Cálculo de masa, momentos y centro para integrales múltiples

Sea $A \in \mathbb{R}^2$ una región elemental de $\mathbb{R}^2$

Sea $\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la densidad de masa.

Podemos calcular la masa

$M = \iint_A \delta dxdy$

Momentos estáticos respecto a los ejes coordenados

$M_x = \iiint_A y\delta dxdy$

$M_y = \iiint_A x\delta dxdy$

Centro de masa:

$G = \frac{1}{M}(M_y, M_x)$

Momentos de inercia respecto a los ejes coordenados

$I_x = \iint_A y^2\delta dxdy$

$I_y = \iint_A x^2\delta dxdy$

Sea $A \in \mathbb{R}^3$ una región elemental de $\mathbb{R}^3$

Sea $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ contínua la densidad de masa.

Podemos calcular la masa

$M = \iiint_A \delta dxdydz$

Momentos estáticos respecto a los planos coordenados

$M_{xy} = \iiint_A z\delta dxdydz$

$M_{xz} = \iiint_A y\delta dxdydz$

$M_{yz} = \iiint_A x\delta dxdydz$

Centro de masa:

$G = \frac{1}{M}(M_{yz}, M_{xz}, M_{xy})$

Momentos estáticos respecto a ejes coordenados

$M_x = \iiint_A \sqrt{y^2 + z^2}\delta dxdydz$

$M_y = \iiint_A \sqrt{x^2 + z^2}\delta dxdydz$

$M_z = \iiint_A \sqrt{x^2 + y^2}\delta dxdydz$

Momentos de inercia respecto a ejes coordenados

$I_x = \iiint_A (y^2 + z^2)\delta dxdydz$

$I_y = \iiint_A (x^2 + z^2)\delta dxdydz$

$I_z = \iiint_A (x^2 + y^2)\delta dxdydz$

Momentos de inercia respecto a planos coordenados

$I_{xy} = \iiint_A z^2 \delta dxdydz$

$I_{xz} = \iiint_A y^2 \delta dxdydz$

$I_{yz} = \iiint_A x^2 \delta dxdydz$

11. Integrales de Superficie y Flujo

11.1. Definición para superficie paramétrica

Dada una superficie $\Sigma \in \mathbb{R}^3$ con parametrización $g : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, y dado un campo escalar $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ contínuo, tal que $\Sigma \in A^\circ$, definimos la integral de f sobre Σ como

$$\iint_\Sigma f ds = \iint_B f(g(u,v)) || g'_u(u,v) \wedge g'_v(u,v) || dudv$$

Dada la misma superficie σ con misma parametrización g, y dado el campo vectorial $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ contínuo, tal que $\Sigma \in A^\circ$, definimos la integral de f sobre Σ en este caso también llamado **flujo** como

$$\iint_\Sigma f \cdot ds = \iint_B f(g(u,v)) \cdot (g'_u(u,v) \wedge g'_v(u,v)) dudv$$

En este caso decimos que se trata de la integral sobre la superficie Σ en la orientación con vector normal $g'_u(u,v) \wedge g'_v(u,v)$

11.2. Caso superficie gráfica de campo escalar

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, su conjunto gráfica consiste en el conjunto $\Sigma = \{(x,y,z) \in A \times \mathbb{R} : z = f(x,y)\}$.

La misma la podemos parametrizar como

$g(x,y) = (x, y, h(x,y))$

luego

$g'_x = (1, 0, h'_x)$

$g'_y = (0, 1, h'_y)$

$g'_x \wedge g'_y = (-f'_x, -f'_y, 1)$

11.3. Caso superficie definida implícitamente

Sea el campo escalar $G : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $G \in C^1$ y supongamos la superficie σ corresponde al conjunto de nivel 0 de G de ecuación $G(x, y, z) = 0$ y $G'_z(x, y, z) \neq 0$.

Entonces por el teorema de Cauchy-Dini, la ecuación define implícitamente a $z = w(x, y)$, con w diferenciable. Luego podemos parametrizar Σ de la siguiente forma

$g(x, y) = (x, y, w(x, y))$

$g'_x = (1, 0, w'_x)$

$g'_y = (0, 1, w'_y)$

$g'_x \wedge g'_y = (-w'_x, -w'_y, 1)$

pero

$w'_x = -\frac{G'_x}{G'_z}$

$w'_y = -\frac{G'_y}{G'_z}$

reemplazando

$g'_x \wedge g'_y = (\frac{G'_x}{G'_z}, \frac{G'_x}{G'_z}, 1) = \frac{1}{G'_z}\nabla G$

11.4. Cálculo de masa, momentos, y centro para superficies

Sea $g : A \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de la superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

Sea $\delta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ contínua la densidad de masa.

Entonces podemos calcular la masa

$M = \iint_S \delta ds$

Momentos estáticos respecto a los planos coordenados

$M_{xy} = \iint_S z\delta ds$

$M_{xz} = \iint_S y\delta ds$

$M_{yz} = \iint_S x\delta ds$

Centro de masa:

$G = \frac{1}{M}(M_{yz}, M_{xz}, M_{xy})$

Momentos estáticos respecto a ejes coordenados

$M_x = \iint_S \sqrt{y^2 + z^2}\delta ds$

$M_y = \iint_S \sqrt{x^2 + z^2}\delta ds$

$M_z = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\delta ds$

Momentos de inercia respecto a ejes coordenados

$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\delta ds$

$I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\delta ds$

$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\delta ds$

Momentos de inercia respecto a planos coordenados

$I_{xy} = \iint_S z^2\delta ds$

$I_{xz} = \iint_S y^2\delta ds$

$I_{yz} = \iint_S x^2\delta ds$

12. Teoremas de Green, Stokes y Gauss

Definición:

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \in C^1$, $f = (P, Q)$, entonces definimos $green(f) = Q'_x - P'_y$

El **operador nabla** corresponde a $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^1$, $f = (P, Q, R)$, entonces definimos

$rot(f) = \nabla \wedge f = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$

$div(f) = \nabla \cdot f = P'_x + Q'_y + R'_z$

12.1. Teorema de Green

Dada una región elemental $A \subset \mathbb{R}^2$ con curva frontera $C = \partial A$ regular/a trozos (automáticamente cerrada y simple, o sea de Jordan), y sea el campo vectorial $f : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \in C^1$, $f = (P, Q)$, y con $A \subset B$, entonces

$$\oint_{C^+=\partial A} f \cdot dc = \iint_A Q'_x - P'_y dxdy$$

12.2. Teorema de Stokes

Dada una superficie abierta $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ y su curva borde $C = \partial\Sigma$ regular/a trozos (automáticamente cerrada y simple), y sea $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^1$ con $f = (P, Q, R)$, y con $\Sigma \subset A$, entonces

$$\oint_{C^+=\partial\Sigma} f \cdot dc = \iint_\Sigma rot(f) \cdot ds$$

12.3. Teorema de la divergencia

Dada una región elemental del espacio $H \subset \mathbb{R}^3$, y su superficie frontera $\Sigma = \partial H$ una superficie regular/a trozos (automáticamente cerrada y simple), y sea $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^1$, con $f = (P, Q, R)$, y $H \subset A$, entonces

$$\iint_{\Sigma^+=\partial H} f \cdot ds = \iiint_H div(f) dxdydz$$

12.4. Campos irrotacionales, solenoidales, y armónicos

Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto.

Un campo vectorial $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^1$ se dice **irrotacional** si $rot(f) = 0$

Un campo vectorial $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \in C^1$ se dice **solenoidal** si $div(f) = 0$

Un campo escalar $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ se dice **armónico** si $div(grad(f)) = 0$

Teorema:

Sea el campo escalar $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, entonces $rot(grad(f)) = 0$, es decir los campos de gradientes son irrotacionales.

Sea el campo vectorial $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $f \in C^2$, entonces $div(rot(f)) = 0$, es decir los campos de rotores son solenoidales.

13. Ecuaciones Diferenciales 2º parte

13.1. Ecuación diferencial ordinaria homogénea

Una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice **homogénea de grado** k si $F(\lambda x) = \lambda^k F(x)$.

Una ecuación diferencial ordinaria se dice homogénea si se puede expresar en la forma

$y' = F(x, y)$

donde F es una **función homogénea** de grado cero, es decir si $F(tx, ty) = F(x, y)$

Resolución:

Se resuelven símplemente mediante la sustitución $y = zx$, donde z depende de x.

13.2. Ecuación diferencial exacta

Es una ecuacioón diferencial ordinara que se puede expresar como

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

y tal que existe $\phi : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\phi \in C^2$ con $d\phi(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

Si A es símplemente conexo, alcanza con verificar que $Q'_x - P'_y = 0$.

Se resuelve buscando la función potencial $\phi(x, y)$ de $f = (P, Q)$, y luego la solución general es $\phi(x, y) = C$

13.2.1. Convertible a exacta con factor integrante

Si $Q'_x - P'_y \neq 0$ pero al dividirla por P o por Q depende sólamente de una variable, hay un factor integrante respecto de esa variable:

$\mu(x) = e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx}$

$\mu(y) = e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P} dy}$

Se multiplica la ecuación diferencial por μ para convertirla en total exacta, y se resuelve como una total exacta.

13.3. Ecuación diferencial lineal de 2º orden

Son las que se pueden escribir como

$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x)$

La ecuación diferencial homogénea asociada es

$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$

La solución general viene dada por $y = y_h + y_p$, donde y_h es la SG de la homogénea asociada, y y_p es una SP.

Si $a(x) = a$ y $b(x) = b$ son constantes se dice que la ecuación diferencial es **a coeficientes constantes**:

$y'' + ay' + by = g(x)$

La EDO de 2º orden lineal homogénea asociada es

$y'' + ay' + by = 0$

Para resolverla se propone como solución $y = e^{\alpha x}$, se sustituye en la EDO y queda la ecuación característica $\alpha^2 + a\alpha + b = 0$

1º Caso: α_1, α_2 reales y distintas. En este caso la SG es

$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$

2º Caso: $\alpha_1 = \alpha_2$ reales e iguales. En este caso la SG es

$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 x e^{\alpha_1 x}$

3º Caso: $\alpha_1 = r + si$, $\alpha_2 = r - si$ complejas conjugadas.

En este tercer caso la SG se deduce con la Fórmula de Euler:

$e^{is} = \cos(s) + i\sin(s)$

y la SG es

$y = a^{rx}[c_1 \cos(sx) + c_2 \sin(sx)]$

Para la SP si $g(x)$ es relativamente sencilla (combinación de polinomios, exponenciales y trigonométricas), podemos usar el método de **coeficientes indeterminados**: se trata de .ªdivinar"la solución proponiendo como solución una familia de funciones acorde al problema, y luego se determinan los coeficientes.

Si la función es polinómica, ejemplo $g(x) = 2x^2$, propongo $y_p = ux^2 + vx + w$

Si la función es exponencial, ejemplo $g(x) = e^{2x} + 2e^x$, propongo $y_p = ue^{2x} + ve^x$

Si la función es trigonométrica, ejemplo $g(x) = \cos(2x)$ propongo $y_p = u\cos(2x) + v\sin(2x)$

Se reemplazan en la EDO y se averiguan los coeficientes indeterminados.

13.4. Wronskiano

Supongamos que queremos saber si dos funciones $f_1(x), f_2(x)$ diferenciables son linealmente independientes.

Una manera que a veces resulta sencilla es calcular el wronskiano.

El **wronskiano** es el siguiente determinante

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$$

Si $W \neq 0$ entonces $\{f_1(x), f_2(x)\}$ es LI.

13.5. Líneas de campo

Dado un campo vectorial $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, una línea de campo es una curva regular C que se puede parametrizar con $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $C \subset A$, y $g'(t) = f(g(t))$ para todo $a < t < b$

Observación:

En $\mathbb{R}^2$, si parametrizamos la línea de campo con $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$, entonces $g'(t) = (g_1'(t), g_2'(t)) = (P, Q) = f(g(t))$. Luego $\frac{dx}{dt} = P$, y $\frac{dy}{dt} = Q$, y por lo tanto $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{Q}{P}$.

Es decir que podemos encontrar la familia de líneas de campo resolviendo la ecuación diferencial $y' = Q/P$.

Teorema: Las líneas de campo de un gradiente son ortogonales a los conjuntos de nivel de su función potencial.

Es decir, si $\phi : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, entonces las líneas de campo de $f = \nabla\phi$ son normales a los conjuntos de nivel de ϕ.

Demostración:

Sea $C_1 \subset A$ una curva incluída en el conjunto de nivel k de ϕ parametrizada por $h : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Sea $C_2 \subset A$ una línea de campo del campo $f = \nabla\phi$, parametrizada por $g : [c, d] \to \mathbb{R}^n$.

Supongamos que ambas curvas se cruzan en $h(t_0) = g(u_0) = x_0 \in A$

Consideremos la compuesta

$w = \phi \circ h$, $w(t) = \phi(h(t)) = k$

Como ambas son diferenciables, por el teorema de la regla de la cadena e tiene

$w'(t_0) = \nabla\phi(h(t_0)) \cdot h'(t_0)$

como $f = \nabla\phi$

$= f(h(t_0))h'(t_0)$

como $h(t_0) = g(u_0)$

$= f(g(u_0))h'(t_0) = 0$

Como g es una línea de campo, $f(g(u_0)) = g'(u_0)$, y por lo tanto

$g'(u_0)h'(t_0) = 0$

Lo que muestra que estos vectores tangentes son ortogonales.

Tanto las líneas de campo como el conjunto de nivel eran genéricos. Es decir que las líneas de campo y los conjuntos de nivel son ortogonales.